Kambly-Roeder,

Trigonometrie.

Vollständig nach den preußischen Lehrplänen von 1892 bearbeitete Ausgabe der

Trigonometrie von Kambly.

Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima.

Unter Voranstellung der

Planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda.

Vierte Auflage.

(28. der Kamblyschen Trigonometrie.)

Ferdinand Hirt,
Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung.
Breslau, 1901.

Vorwort.

Der vorliegende Band der Umarbeitung der Kamblyschen Elementar-Mathematik bringt

1) die Lehraufgabe der Ober-Sekunda in der Planimetrie und

2) die Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima in der ebenen Trigonometrie.

Die wichtigsten Sätze aus der sphärischen Trigonometrie, sowie der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte werden der in Vorbereitung begriffenen Umarbeitung der Stereometrie beigegeben werden.

Von dem ersten Hauptteile sind den preußischen Lehrplänen vom Jahre 1892 entsprechend für die Gymnasien bestimmt: 1) Erweiterung der Lehraufgaben der früheren Klassen (§ 1 bis § 5), 2) Aufgaben aus der rechnenden Geometrie (§ 6 bis § 13), 3) Konstruktion algebraischer Ausdrücke und Auflösung von Aufgaben durch Rechnung (§ 14 bis § 16), 4) Vermischte Übungen (§ 17). [2), 3) und 4) mit Auswahl.] Ferner die Sätze des Ceva, des Menelaos und des Pascal (§ 18 bis § 21) und die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen (§ 22 bis § 30).

Die folgenden Abschnitte (§ 31 bis § 55) sind auf den Realgymnasien und den Ober-Realschulen zu behandeln.

Der zweite Hauptteil, die Trigonometrie, bringt den Lehrplänen vom Jahre 1892 entsprechend zunächst die trigonometrischen Funktionen der schiefen Winkel und die trigonometrische Berechnung der schiefwinkligen ungleichseitigen Dreiecke aus einfachen Stücken, dann die Goniometrie und schließlich die trigonometrische Berechnung der Dreiecke mit Hilfe der goniometrischen Formeln. Eine passende Auswahl für die Gymnasien wird hier leicht zu treffen sein.

Den einzelnen Abschnitten ist, wie in der Neubearbeitung der Planimetrie, eine ausreichende Zahl geordneter Übungsaufgaben beigefügt, so daß eine besondere Aufgabensammlung entbehrlich ist. Einzelne Aufgaben sind ausführlich gelöst. Die Aufgaben sind zum größten Teile entnommen den „Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie", herausgegeben von dem Unterzeichneten.

Bei den Hinweisungen auf frühere Lehrsätze und Übungsaufgaben aus der Planimetrie und der trigonometrischen Lehraufgabe der Unter-Sekunda ist auf „Kambly-Roeder, Planimetrie, Umarbeitung" Auflage 1 und 2 Bezug genommen.

Den Herren Fachgenossen, die den Unterzeichneten bereitwilligst mit Rat und That unterstützt haben, sei auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Alle etwaigen Wünsche für Verbesserungen, beziehentlich Änderungen werden mit bestem Danke aufgenommen und geprüft werden.

Hannover, im Juli 1895.

Roeder.

Inhaltsverzeichnis.

I. Planimetrie.

II. Trigonometrie.

Bezeichnungen.

1. Allgemeines Dreieck:
   A, B, C die Eckpunkte;
   α, β, γ die Winkel an den Ecken A, B, C;
   a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten $(a > b)$;
   h_a, h_b, h_c die zu den Seiten a, b, c gehörigen Höhen;
   H_a, H_b, H_c die Fußpunkte der Höhen h_a, h_b, h_c;
   H der Schnittpunkt der drei Höhen;
   p, q die von der Höhe h_c auf c gebildeten Abschnitte BH_c und AH_c;
   ist $\alpha < 1\,R$, so ist $c > p$ und $c = p + q$;
   ist $\alpha > 1\,R$, so ist $c < p$ und $c = p - q$;
   s_a, s_b, s_c die zu den Seiten a, b, c gehörigen Seitenhalbierenden;
   S_a, S_b, S_c die Halbierungspunkte der Seiten a, b, c;
   S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden;
   $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ die Winkelhalbierenden der Winkel α, β, γ;
   $W_\alpha, W_\beta, W_\gamma$ die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Seiten;
   W der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden;
   u, v die von w_γ auf c gebildeten Abschnitte BW_γ, AW_γ;
   r der Radius, M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises;
   ϱ der Radius, W der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises;
   ϱ_a der Radius, W_a der Mittelpunkt des der Seite a anbeschriebenen Kreises;
   ϱ_b „ „ W_b „ „ „ „ „ b „ „ ;
   ϱ_c „ „ W_c „ „ „ „ „ c „ „ .
2. Gleichschenkliges Dreieck:
   c die Basis; a der Schenkel; α der Basiswinkel; γ der Winkel an der Spitze.
3. Gleichseitiges Dreieck:
   c die Seite; h die Höhe.
4. Rechtwinkliges Dreieck:
   a, b die Katheten $(a > b)$; c die Hypotenuse; h die zur Hypotenuse gehörige Höhe.
5. Allgemeines Viereck:
   A, B, C, D die Eckpunkte der Reihe nach;
   $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkel an den Ecken A, B, C, D;
   a die Seite AB, b die Seite BC, c die Seite CD, d die Seite DA;
   e die Diagonale AC, f die Diagonale BD;
   E der Schnittpunkt der Diagonalen; ε der Winkel AEB.
6. Trapez:
   $AB = a$ und $CD = c$ die beiden Grundlinien $(a > c)$, h die Höhe;
7. Parallelogramm:
   h der Abstand der beiden Seiten AB und CD.
8. s der halbe Umfang einer geradlinigen geschlossenen Figur.
9. $\angle\,(ab)$ der Winkel zwischen a und b.

I. Planimetrie.*)

A. Erweiterungen und Vervollständigungen der Lehraufgaben der früheren Klassen.

1. Erweiterungen der Lehraufgaben der früheren Klassen.

§ 1.

1. **Der verallgemeinerte Pythagoreische Lehrsatz.**

a) In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

b) Im stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

1. Voraussetzung. $\gamma < 90^0$ und $AD \perp BC$. [Fig. 1a.]
Behauptung. $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b_a$.
Beweis.
$$c^2 = (a - b_a)^2 + x^2$$
$$= a^2 - 2a\,b_a + b_a^2 + b^2 - b_a^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b_a.$$

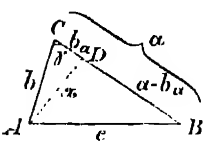

Fig. 1a.

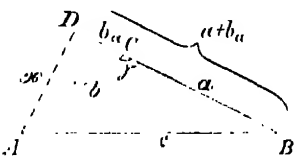

Fig. 1b.

2. Voraussetzung. $\gamma > 90^0$ und $AD \perp BC$. [Fig. 1b.]
Behauptung. $c^2 = a^2 + b^2 + 2a\,b_a$.
Beweis.
$$c^2 = (a + b_a)^2 + x^2$$
$$= a^2 + 2a\,b_a + b_a^2 + b^2 - b_a^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a\,b_a.$$

*) Lehraufgabe der Ober-Sekunda.

2. Zusatz 1. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate irgend zweier Seiten gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrate der zu ihr gehörigen Seitenhalbierenden.

$$a^2 + b^2 = 2\left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + 2s_c^2.$$

[Bezeichnet man die Projektion von s_c auf AB mit x, so ist, wenn $a > b$, $a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 + 2\frac{c}{2}x$ und $b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - 2\frac{c}{2}x$.]

3. Zusatz 2. Die Summen der Quadrate der Abstände beliebiger Punkte eines Kreises von zwei vom Mittelpunkte gleichweit entfernten festen Punkten eines Durchmessers sind einander gleich.

4. Der **geometrische Ort** aller Punkte von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten gleich einem gegebenen Quadrate ist, ist der Kreis, dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke der beiden festen Punkte ist, und dessen Halbmesser auf folgende Weise gefunden wird: man zeichnet zwei Quadrate, deren Summe gleich dem gegebenen Quadrate ist, zeichnet das Dreieck, in welchem eine Seite die Verbindungsstrecke der beiden festen Punkte ist und die beiden anderen Seiten gleich den Seiten der gefundenen Quadrate sind, dann ist die zur ersten Seite gehörige Seitenhalbierende der gesuchte Halbmesser.

5. Ein Dreieck zu konstruieren aus

$a^2 + b^2$, c und a) α. b) γ. c) h_c. d) h_a. e) r. f) p.
$a^2 + b^2$, s_c und g) α. h) γ. i) h_c. k) h_a.

§ 2.

1. Der **geometrische Ort** aller Punkte von der Beschaffenheit, daß die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten gleich einem gegebenen Quadrate ist, ist eine Senkrechte auf der Verbindungsgeraden der beiden festen Punkte. Man erhält diese Senkrechte, indem man zwei Quadrate zeichnet, deren Differenz gleich dem gegebenen Quadrate (l^2) ist, das Dreieck zeichnet, in welchem eine Seite die Verbindungsstrecke der beiden festen Punkte (P_1 und P_2) und die beiden anderen Seiten gleich den Seiten (x und y) der gefundenen Quadrate sind, und auf die erste Seite ($P_1 P_2$) oder ihre Verlängerung von der ihr gegenüberliegenden Ecke (P) die Senkrechte fällt.

Beweis. Ist $PP_2^{\,2} - PP_1^{\,2} = l^2$, $PF \perp P_1P_2$ und P' ein Punkt auf der Geraden PF, so ist auch

$$1.\quad P'P_2^{\,2} - P'P_1^{\,2} = l^2.$$

Denn es ist $PP_2^{\,2} = PF^2 + FP_2^{\,2}$
und $PP_1^{\,2} = PF^2 + FP_1^{\,2}$,

$$PP_2^{\,2} - PP_1^{\,2} = FP_2^{\,2} - FP_1^{\,2}.$$

Ebenso ist auch $P'P_2{}^2 - P'P_1{}^2 = FP_2{}^2 - FP_1{}^2$,
folglich ist $P'P_2{}^2 - P'P_1{}^2 = PP_2{}^2 - PP_1{}^2 = l^2$.

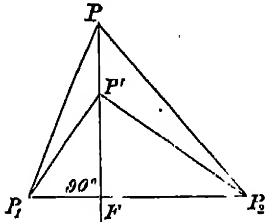

Fig. 2a.

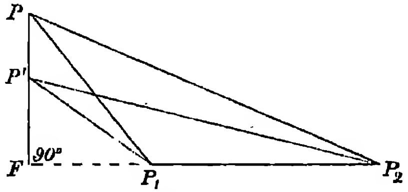

Fig. 2b.

2. Jeder Punkt Q, für welchen

$$QP_2{}^2 - QP_1{}^2 = l^2,$$

muß auf der Senkrechten PF liegen.

Denn läge Q nicht auf PF, so wäre, wenn man den Fußpunkt des von Q auf die Gerade P_1P_2 gefällten Lotes mit G bezeichnen würde,

$$QP_2{}^2 - QP_1{}^2 = l^2 = GP_2{}^2 - GP_1{}^2;$$

nun ist aber $PP_2{}^2 - PP_1{}^2 = l^2 = FP_2{}^2 - FP_1{}^2$,
folglich wäre $GP_2{}^2 - GP_1{}^2 = FP_2{}^2 - FP_1{}^2$ oder
†) $(GP_2 + GP_1)(GP_2 - GP_1) = (FP_2 + FP_1)(FP_2 - FP_1)$.

Liegt nun F auf der Strecke P_1P_2, so könnte G entweder ebenfalls auf der Strecke P_1P_2 oder auf der Verlängerung der Strecke P_1P_2 über P_1 hinaus liegen. (Auf der Verlängerung der Strecke P_1P_2 über P_2 hinaus kann G nicht liegen, da dann $QP_2 < QP_1$, also $QP_2{}^2 - QP_1{}^2$ negativ wäre, also nicht gleich l^2 sein könnte; ebenso kann auch F nicht auf der Verlängerung der Strecke P_1P_2 über P_2 hinaus liegen.) Im ersten Falle wäre

$$GP_2 + GP_1 = P_1P_2 = FP_2 + FP_1,$$

folglich müßte nach Gleichung †)

$$GP_2 - GP_1 = FP_2 - FP_1$$

sein. Das ist aber nicht möglich.

Im zweiten Falle wäre

$$GP_2 - GP_1 = P_1P_2 = FP_2 + FP_1,$$

folglich müßte nach Gleichung †)

$$GP_2 + GP_1 = FP_2 - FP_1$$

sein. Das ist ebenfalls nicht möglich.

Liegt also F auf der Strecke P_1P_2, so muß G mit F zusammenfallen.

Ebenso läßt sich zeigen, daß, wenn F auf der Verlängerung der Strecke P_1P_2 über P_1 hinaus liegt, G mit F zusammenfallen muß.

Folglich muß Q auf der Senkrechten FP liegen.

3. Ein Dreieck zu konstruieren aus
$a^2 - b^2$, c und a) α. b) γ. c) h_c. d) h_a. e) s_c. f) s_a. g) r. h) $a^2 + b^2$.

§ 3.

Satz des Ptolemäus. In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten gleich dem Rechtecke aus den Diagonalen.

Behauptung. $ac + bd = ef$.

Beweis. Man trage $\angle DAC$ an AB in A so an, daß der freie Schenkel in das Viereck fällt; dieser freie Schenkel schneide die Diagonale BD in einem Punkte P. Dann ist

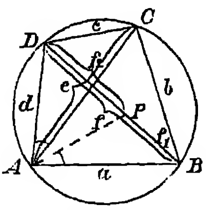

Fig. 3.

$$\triangle BAP \backsim CAD, \text{ folglich}$$

$a : e = f_1 : c$ oder (1) $ac = ef_1$; ferner ist

$$\triangle DAP \backsim CAB, \text{ folglich}$$

$d : e = f_2 : b$ oder (2) $bd = ef_2$.

Aus (1) und (2) folgt, da $f_1 + f_2 = f$ ist, die Behauptung.

Anmerkung. Ist das Sehnenviereck ein Rechteck, so folgt aus dem obigen Satze der Lehrsatz des Pythagoras.

§ 4.

1. Die Halbierungsgeraden der Außenwinkel an den Ecken A und B des Dreiecks ABC schneiden einander im Punkte W_c. Durch diesen Punkt geht auch die Halbierungsgerade des Winkels γ. Die Fußpunkte der von W_c auf BC, AC und AB gefällten Senkrechten seien A_c, B_c und C_c. Dann ist

$$\angle W_cAC_c = W_cAB_c = 1\,R - \frac{\alpha}{2}; \quad \angle W_cBC_c = W_cBA_c = 1\,R - \frac{\beta}{2};$$

$$\triangle W_cAC_c \cong W_cAB_c; \quad \triangle W_cBC_c \cong W_cBA_c;$$

$$\angle AW_cC_c = AW_cB_c = \frac{\alpha}{2}; \quad \angle BW_cC_c = BW_cA_c = \frac{\beta}{2};$$

$$\angle AW_cB = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1\,R - \frac{\gamma}{2};$$

$$W_cB_c = W_cC_c = W_cA_c = \varrho_c.$$

W_c ist der Mittelpunkt des der Seite $AB = c$ **anbeschriebenen** Kreises und A_c, B_c und C_c die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten a, b und c.

Auf ähnliche Weise findet man den Mittelpunkt W_a des der Seite $BC = a$ anbeschriebenen Kreises, dessen Berührungspunkte mit den Seiten a, b und c mit A_a, B_a und C_a bezeichnet werden mögen, und den Mittelpunkt W_b des der Seite $AC = b$ anbeschriebenen Kreises,

dessen Berührungspunkte mit den Seiten a, b und c mit A_b, B_b und C bezeichnet werden mögen. [Vergl. Planim. § 101, 222.]

2. $AB_c = AC_c$; $BA_c = BC_c$; $CB_c = CA_c$;

$$CB_c + CA_c = CA + AC_c + CB + BC_c = a + b + c = 2s;$$

$$CB_c = CA_c = \frac{a+b+c}{2} = s;$$

$$AC_c = AB_c = CB_c - CA = \frac{a+c-b}{2} = s - b \; (= BC' = BA')$$

$$BC_c = BA_c = CA_c - CB = \frac{b+c-a}{2} = s - a \; (= AC' = AB');$$

$$AB_a = AC_a = s; \quad BA_a = BC_a = s - c; \quad CA_a = CB_a = s - b;$$

$$BA_b = BC_b = s; \quad AB_b = AC_b = s - c; \quad CB_b = CA_b = s - a;$$

$$AC_b = BC_a = s - c; \quad AC' = BC_c = s - a;$$

$$BC' = AC_c = s - b;$$

$$C'C_c = AC_c - AC' = s - b - (s - a) = a - b; \quad C_aC_b = a + b;$$

$$C_aC' = a; \quad C_bC_c = a; \quad C_bC' = b; \quad C_aC_c = b;$$

$$B'B_c = A'A_c = AB = c;$$

$$C'S_c = C_cS_c = \frac{a-b}{2}; \quad C_bS_c = C_aS_c = \frac{a+b}{2}.$$

3. Da $\angle WAW_c = WBW_c = 1R$, so liegen die vier Punkte A, W, B, W_c auf einem Kreise, für welchen WW_c der Durchmesser und der Halbierungspunkt D_c von WW_c der Mittelpunkt ist.

Kennt man also W und W_c, so hat man einen geom. Ort für A, B und C.

$\angle AW_cW = ABW = \frac{\beta}{2}$ als Umfangswinkel über demselben Bogen;

$\angle BW_cW = BAW = \frac{\alpha}{2}$; $\angle AD_cC = AD_cW = 2 . AW_cW = \beta$; $\angle BD_cC = \alpha$;

folglich liegt D_c auf dem dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreise; ebenso auch die Halbierungspunkte D_a von WW_a und D_b von WW_b. Da $D_cA = D_cB$, so ist D_c der Halbierungspunkt des Bogens AB.

4. Da $\angle W_aAW_b = W_aBW_b = 1R$, so liegen die vier Punkte W_a, A, B und W_b auf einem Kreise, für welchen W_aW_b der Durchmesser und der Halbierungspunkt E_c von W_aW_b der Mittelpunkt ist. Kennt man also W_a und W_b, so hat man einen geom. Ort für A, B und C.

$$\angle AW_aW_b = ABW_b = \frac{\beta}{2}; \quad \angle BW_bW_a = BAW_a = \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle AE_cC = AE_cW_b = 2 . AW_aW_b = \beta;$$

folglich liegt E_c auf dem dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreise; ebenso die Halbierungspunkte E_a von W_bW_c und E_b von W_aW_c.

5. Da $D_cA = D_cB$ und $E_cA = E_cB$, so liegen D_c und E_c auf der Mittelsenkrechten von AB; D_cE_c ist daher ein Durchmesser des Kreises um ABC, und der Halbierungspunkt von D_cE_c der Mittelpunkt M dieses Kreises.

6. $W_aW_bW_c$ ist ein Dreieck, dessen Höhen W_aA, W_bB und W_cC einander in W schneiden, dessen Seiten in den Punkten E_a, E_b und E_c, und dessen obere Höhenabschnitte W_aW, W_bW und W_cW in den Punkten D_a, D_b und D_c halbiert werden. Die Punkte A, B, C, E_a, E_b, E_c, D_a, D_b und D_c liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt von D_cE_c ist.

7. Die durch W zu AB gezogene Parallele schneidet die Verlängerung von W_cC_c in einem Punkte F des Kreises $AWBW_c$; dann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke WFW_c die Kathete $W_cF = \varrho_c + \varrho$, die Kathete $WF = C'C_c = a - b$ und $\angle WW_cF = \angle (h_cw_\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Die durch W zu BC gezogene Parallele schneidet W_cA_c in einem Punkte G des Kreises $AWBW_c$; dann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke WGW_c die Kathete $W_cG = \varrho_c - \varrho$, die Kathete $WG = A'A_c = c$ und $\angle W_cWG = \frac{1}{2}\gamma$.

Die durch W_b zu AB gezogene Parallele schneidet W_aC_a in einem Punkte J des Kreises W_bABW_a; dann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke W_bJW_a die Kathete $W_aJ = \varrho_a - \varrho_b$, die Kathete $W_bJ = C_bC_a = a + b$ und $\angle W_aW_bJ = \frac{\alpha - \beta}{2}$ (die Schenkel dieses Winkels stehen auf denen des $\angle (h_cw_\gamma)$ senkrecht).

Die durch W_b zu BC gezogene Parallele schneidet die Verlängerung von W_aA_a in einem Punkte K des Kreises W_bABW_a; dann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke W_bKW_a die Kathete $W_aK = \varrho_a + \varrho_b$, die Kathete $W_bK = A_bA_a = c$ und $\angle W_bW_aK = \frac{1}{2}\gamma$.

§ 5.

Ein Dreieck zu zeichnen aus

1) ϱ_c, α, β. 2) ϱ_c, γ, a ($b, w_\gamma, \varrho, c, r, a + b - c, a + c - b, b + c - a$).
3) ϱ_c, $a + b + c$, α ($\beta, w_\gamma, \varrho, h_a, h_b, h_c$). 4) ϱ_c, c, $a + b$ (r).
5) $r + \varrho_c, c, \gamma$. 6) ϱ_c, α, b ($c, \varrho, a + b + c, b + c - a, h_c, h_b, h_a$).
7) ϱ_c, $a + c - b$, γ ($\beta, \varrho, h_c, h_b, h_a$). 8) $a + b + c, \gamma, w_\gamma$, ($\varrho, h_b, h_a$).
9) $\varrho_c + \varrho, \alpha, \beta$. 10) $\varrho_c + \varrho$, a, b. 11) $\varrho_c + \varrho$, $\alpha - \beta$, c ($a + b$).
12) $\varrho_c + \varrho$, $a - b$, α ($\beta, \gamma, c, h_a, h_b, p - q, u, v, u - v$).
13) $\varrho_c - \varrho, \alpha, \beta$. 14) $\varrho_c - \varrho$, $a : b : c$.
15) $\varrho_c - \varrho, \gamma$, $a \pm b$ ($a + b \pm c$, $a : b$).
16) $\varrho_c - \varrho$, c, α ($\alpha - \beta$, $a \pm b$, $h_c, s_c, p, u, a : b, u : v, h_b : h_a$).

17) $\varrho_a - \varrho_b,\ \alpha,\ \beta.$ 18) $\varrho_a - \varrho_b,\ a,\ b.$ 19) $\varrho_a - \varrho_b,\ \alpha - \beta,\ c\ (a - b).$
20) $\varrho_a - \varrho_b,\ a + b,\ \alpha\ (\gamma,\ c).$ 21) $\varrho_a + \varrho_b,\ \alpha,\ \beta.$
22) $\varrho_a + \varrho_b,\ c,\ \alpha\ (\alpha - \beta,\ a + b).$ 23) $\varrho_a + \varrho_b,\ \gamma,\ a \pm b\ (a + b + c).$
24) $\varrho_c,\ \varrho,\ \alpha - \beta\ (a - b,\ \gamma,\ c).$ 25) $\varrho_a,\ \varrho_b,\ \alpha - \beta\ (a + b,\ \gamma,\ c).$

2. Aufgaben aus der rechnenden Geometrie.

§ 6.

Aufgabe. Die Seiten und den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den Höhen zu berechnen.

Auflösung. Es ist

$$F = \tfrac{1}{2} c h_c = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Aus $a h_a = c h_c$ und $b h_b = c h_c$

ergiebt sich $a = \dfrac{c h_c}{h_a}$ und $b = \dfrac{c h_c}{h_b}$;

folglich ist
$$2s = a + b + c = \frac{c h_c}{h_a} + \frac{c h_c}{h_b} + c$$
$$= c\,\frac{h_b h_c + h_a h_c + h_a h_b}{h_a h_b},$$

$$2(s-a) = -a + b + c = c\,\frac{-h_b h_c + h_a h_c + h_a h_b}{h_a h_b},$$

$$2(s-b) = a - b + c = c\,\frac{h_b h_c - h_a h_c + h_a h_b}{h_a h_b},$$

$$2(s-c) = a + b - c = c\,\frac{h_b h_c + h_a h_c - h_a h_b}{h_a h_b}.$$

Setzt man $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = 2 s_h$, so ist

$$s = c\,\frac{s_h}{h_a h_b},\quad s - a = c\,\frac{s_h - h_b h_c}{h_a h_b},\quad s - b = c\,\frac{s_h - h_c h_a}{h_a h_b},\quad s - c = c\,\frac{s_h - h_a h_b}{h_a h_b},$$

$$\tfrac{1}{2} c h_c = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$
$$= \frac{c^2}{h_a{}^2 h_b{}^2}\sqrt{s_h\,(s_h - h_a h_b)\,(s_h - h_b h_c)\,(s_h - h_c h_a)},$$

$$c = \frac{h_a{}^2 h_b{}^2 h_c}{2\sqrt{s_h\,(s_h - h_a h_b)\,(s_h - h_b h_c)\,(s_h - h_c h_a)}}\quad \text{und}$$

$$F = \frac{h_a{}^2 h_b{}^2 h_c{}^2}{4\sqrt{s_h\,(s_h - h_a h_b)\,(s_h - h_b h_c)\,(s_h - h_c h_a)}}$$

§ 7.

Aufgabe 1. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks aus den Seiten zu berechnen.

Auflösung. Aus $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 s_c^2$ [§ 1, Zus. 1]

ergiebt sich $$s_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Anmerkung. Drückt man auch s_a und s_b durch die Seiten aus, so ergiebt sich
$$4(s_b{}^2 - s_a{}^2) = 3(a^2 - b^2) = 3(p^2 - q^2);$$
$$4(s_a{}^2 + s_b{}^2 + s_c{}^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2);$$
$$4(-s_a{}^2 + 2 s_b{}^2 + 2 s_c{}^2) = 9 a^2 \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe 2. Aus zwei Seiten (a und b) eines Dreiecks und der zur dritten Seite gehörigen Seitenhalbierenden (s_c) die dritte Seite und den Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung. 1) Aus $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 s_c^2$

ergiebt sich $$c = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2 s_c{}^2)}.$$

2) Verlängert man die Seitenhalbierende $CS_c = s_c$ über S_c hinaus um sich selbst bis C' und verbindet C' mit B, so ist $\triangle BS_cC' \cong AS_cC$, folglich $\triangle ABC = CC'B$; da die Seiten des letzteren Dreiecks gleich a, b und $2s_c$ sind, so ergiebt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2s_c)(-a+b+2s_c)(a-b+2s_c)(a+b-2s_c)} \text{ oder}$$
$$F = \sqrt{s'(s'-a)(s'-b)(s'-2s_c)}, \text{ wo } a+b+2s_c = 2s'.$$

Aufgabe 3. Aus den drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks die Seiten und den Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung. Da im Dreieck ABS Seite $AS = \frac{2}{3}s_a$, Seite $BS = \frac{2}{3}s_b$ und die zur dritten Seite $AB = c$ gehörige Seitenhalbierende $SS_c = \frac{1}{3}s_c$ ist, so ist nach voriger Aufgabe

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(s_a{}^2 + s_b{}^2) - s_c{}^2} \text{ u. s. w. [Siehe auch Aufgabe 1, Anm.]}$$

Der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC ist dreimal so groß als der Flächeninhalt F_c des Dreiecks ABS; nach der vorigen Aufgabe ist aber

$$F_c = \tfrac{1}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}s_a + \tfrac{2}{3}s_b + \tfrac{2}{3}s_c)(-\tfrac{2}{3}s_a + \tfrac{2}{3}s_b + \tfrac{2}{3}s_c)(\tfrac{2}{3}s_a - \tfrac{2}{3}s_b + \tfrac{2}{3}s_c)(\tfrac{2}{3}s_a + \tfrac{2}{3}s_b - \tfrac{2}{3}s_c)}$$
$$= \tfrac{1}{9}\sqrt{(s_a + s_b + s_c)(-s_a + s_b + s_c)(s_a - s_b + s_c)(s_a + s_b - s_c)}; \text{ folglich}$$
$$F = \tfrac{4}{3}\sqrt{s''(s'' - s_a)(s'' - s_b)(s'' - s_c)}, \text{ wo } s_a + s_b + s_c = 2s''.$$

Anmerkung. Der Inhalt jedes Dreiecks verhält sich also zum Inhalte desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die Seitenhalbierenden des ersten sind, wie 4 : 3.

§ 8.

Aufgabe 1. Die Abschnitte, in welche die Seiten eines Dreiecks durch die Winkelhalbierenden geteilt werden, aus den Seiten zu berechnen.

Auflösung. Die Halbierungsgerade des Winkels ACB teile die Seite AB in die beiden Abschnitte $W_\gamma B = u$ und $W_\gamma A = v$; dann ist $u : v = a : b$. Da nun $u + v = c$ ist, so folgt

$$u = \frac{ac}{a+b} \quad \text{und} \quad v = \frac{bc}{a+b}.$$

[Oder: Aus $u : v = a : b$ ergiebt sich

$$(u + v) : (a + b) = u : a = v : b \text{ oder}$$
$$c : (a + b) = u : a = v : b, \text{ folglich}$$

$$u = \frac{ac}{a+b} \quad \text{und} \quad v = \frac{bc}{a+b}.]$$

Anmerkung 1. Aus $\begin{matrix}(u+v):(a+b) = u : a = v : b \text{ und} \\ (u-v):(a-b) = u : a = v : b \text{ folgt}\end{matrix}$

$$a = \frac{(a+b)\,u}{u+v} = \frac{(a-b)\,u}{u-v}; \quad b = \frac{(a+b)\,v}{u+v} = \frac{(a-b)\,v}{u-v};$$

$$u = \frac{(u-v)\,a}{a-b}; \quad v = \frac{(u-v)\,b}{a-b};$$

folglich kann man aus $a + b$, u, v die Seiten und aus $u - v$, a, b die Abschnitte u und v berechnen und konstruieren.

Aus $u : v = a : b$ und $a : b = h_b : h_a$ folgt $u : v = h_b : h_a$; wenn also von den vier Stücken u, v, h_a, h_b drei gegeben sind, so kann man das vierte Stück berechnen und konstruieren.

Ferner ist $(u + v) : (h_b + h_a) = u : h_b = v : h_a$
und $(u - v) : (h_b - h_a) = u : h_b = v : h_a$; folglich

$$h_b = \frac{(h_b + h_a)\,u}{u+v} = \frac{(h_b - h_a)\,u}{u-v}; \quad h_a = \frac{(h_b + h_a)\,v}{u+v} = \frac{(h_b - h_a)\,v}{u-v};$$

$$u = \frac{c h_b}{h_b + h_a} = \frac{(u-v)\,h_b}{h_b - h_a}; \quad v = \frac{c h_a}{h_b + h_a} = \frac{(u-v)\,h_a}{h_b - h_a}.$$

Man kann daher aus $h_b + h_a$, u, v die Höhen h_a und h_b und aus $u + v$, h_a, h_b die Abschnitte u und v berechnen und konstruieren.

Anmerkung 2. Aus $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ folgt
$$(a - b) : (p - q) = c : (a + b).$$
Nach Anmerk. 1 ist $c : (a + b) = u : a = v : b$, folglich ist
$$(a - b) : (p - q) = u : a = v : b.$$

Wenn daher von den vier Stücken $a - b$, $p - q$, u, a (oder v, b) drei gegeben sind, so kann man das vierte Stück berechnen und konstruieren.

Aus $u : v = a : b$ folgt $(u - v) : (a - b) = u : a = v : b$, folglich ist $(u - v) : (a - b) = (a - b) : (p - q)$, d. h. $a - b$ ist die mittlere Proportionale zu $u - v$ und $p - q$.

Anmerkung 3. Aus
$$(u - v) : (a - b) = u : a = v : b \quad \text{und}$$
$$(a - b) : (p - q) = v : b = u : a \quad \text{folgt}$$
$$(u - v) : (p - q) = uv : ab.$$

Anmerkung 4. Für die Abschnitte $W_{\gamma'}B = u'$ und $W_{\gamma'}A = v'$, in welche die Seite AB durch die Halbierungsgerade des Außenwinkels an der Ecke C geteilt wird, ergiebt sich
$$u' = \frac{ac}{a - b} \text{ und } v' = \frac{bc}{a - b}.$$

Aufgabe 2. Die drei Winkelhalbierenden (w_α, w_β, w_γ) eines Dreiecks aus den Seiten zu berechnen.

Auflösung. Beschreibt man um das Dreieck ABC den Kreis, verlängert die Winkelhalbierende $CW_\gamma = w_\gamma$ bis zum Schnittpunkte D mit dem umbeschriebenen Kreise und verbindet D mit A, so ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDA und CBW_γ, wenn man $W_\gamma D$ mit x bezeichnet,
$$(w_\gamma + x) : b = a : w_\gamma \text{ oder } w_\gamma^2 + w_\gamma x = ab. \quad \text{Da nun } w_\gamma x = uv, \text{ so ist}$$
$$w_\gamma^2 = ab - uv.$$
Setzt man die in der vorigen Aufgabe für u und v gefundenen Werte ein, so erhält man
$$w_\gamma^2 = ab - \frac{abc^2}{(a + b)^2} \text{ oder}$$
$$w_\gamma^2 = \frac{ab\,(a + b + c)\,(a + b - c)}{(a + b)^2}.$$

Anmerkung. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn man die Halbierungsgerade $CW_{\gamma'}$ des Außenwinkels an der Ecke C bis zum Schnittpunkte D' mit dem umbeschriebenen Kreise verlängert und D' mit A verbindet,
$$w_{\gamma'}^2 = \frac{ab\,(-a + b + c)\,(a - b + c)}{(a - b)^2}.$$

§ 9.

Aufgabe. Den Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises zu berechnen aus a) zwei Seiten und der zur dritten Seite gehörigen Höhe. b) den drei Seiten.

Auflösung. Zieht man im Dreieck ABC den Durchmesser CD des umbeschriebenen Kreises, verbindet D mit A und zeichnet die zur Seite AB gehörige Höhe CE, so ist $\triangle$ CAD $\backsim$ CEB, folglich ist
$$(2r) : b = a : h_c \quad \text{oder} \quad r = \frac{ab}{2h_c}. \quad (1)$$
Da $h_c = \frac{2F}{c}$, so folgt
$$r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}. \quad (2)$$
Aus der letzten Gleichung folgt
$$F = \frac{abc}{4r}. \quad (3)$$

Übungen. Nachzuweisen, daß die folgenden Ausdrücke gleich 1 sind:

a) $\frac{ab}{2rh_c}$. b) $\frac{(h_b + h_a)2r}{(a+b)c}$. c) $\frac{(h_b - h_a)2r}{(a-b)c}$. d) $\frac{2r(h_b - h_a)(a+b)}{(p^2-q^2)c}$.

e) $\frac{2r(h_b + h_a)(a-b)}{(p^2-q^2)c}$. f) $\frac{rh_ah_bh_c}{2F^2}$. g) $\frac{4r^2 h_a h_b h_c \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{abc(h_a+h_b+h_c)}$.

Ein Dreieck zu konstruieren aus $ab = l^2$ und a) r, c. b) h_c, c. c) r, γ. d) c, γ. e) h_c, γ. f) r, α. g) r, q. h) h_c, s_c. i) r, s_c. k) $h_c, \alpha - \beta$. l) h_c, w_γ. m) $w_\gamma, \alpha - \beta$. n) $r, \alpha - \beta$. o) F, c. p) F, r. q) F, h_c.

§ 10.

Aufgabe. Die Radien der einem Dreieck anbeschriebenen Kreise aus den Seiten zu berechnen.

Auflösung. Da der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCW_c und ACW_c vermindert um den Flächeninhalt des Dreiecks ABW_c ist, so erhält man

$$F = \tfrac{1}{2}a\varrho_c + \tfrac{1}{2}b\varrho_c - \tfrac{1}{2}c\varrho_c = \tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\varrho_c = (s-c)\,\varrho_c;$$

folglich ist $\varrho_c = \frac{F}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$; auf dieselbe Weise ergiebt sich $\varrho_a = \frac{F}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ und

$$\varrho_b = \frac{F}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}.$$ Da außerdem

$$\varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$ nach Plan. § 113, 6, 4,

so ist $\varrho\varrho_c = (s-a)(s-b)$; $\varrho_a\varrho_b = s(s-c)$;

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = F^2; \qquad \varrho\varrho_c + \varrho_a\varrho_b = ab;$$

$$\frac{\varrho_c}{\varrho} = \frac{s}{s-c}; \qquad \frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \frac{s-b}{s-a}.$$

Ferner läßt sich leicht zeigen, daß

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{2}{h_c}; \qquad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho};$$

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} + \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{4}{h_c}; \qquad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_c} = 2\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right);$$

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{abc}{F} = 4r;$$

$$(\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho) = c^2; \qquad (\varrho_a - \varrho_b)(\varrho_c + \varrho) = a^2 - b^2 = p^2 - q^2;$$

$$(\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_c + \varrho) = (a+b)c; \qquad (\varrho_a - \varrho_b)(\varrho_c - \varrho) = (a-b)c;$$

$$\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{c}{a-b}; \qquad \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{a+b}{c}.$$

Aus $F = \frac{1}{2} c h_c$ folgt $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2F}$ und hieraus

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}; \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_c} \ldots$$

Aus $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{2}{h_c}$, $F = \frac{1}{2} c h_c$ und $F^2 = \varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c$ folgt

$$\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c \varrho} = \frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a \varrho_b} = \frac{2}{h_c} = \frac{c}{F} = \frac{c}{\sqrt{\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c}};$$

$$c = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c \varrho} \sqrt{\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c} = \frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a \varrho_b} \sqrt{\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c}.$$

Aus $\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{2}{h_c}$ oder $\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_c} - \frac{1}{\varrho_b}$ und

$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{h_c}$ oder $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{\varrho_c}$ folgt

$$\frac{\varrho_a - h_c}{h_c - \varrho_b} = \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \text{ und } \frac{h_c - \varrho}{h_c + \varrho_c} = \frac{\varrho}{\varrho_c}.$$

Trägt man daher auf einer Geraden von einem Punkte derselben aus h_c, ϱ_a und ϱ_b nach derselben Seite hin ab, so ist h_c in den freien Endpunkten von ϱ_a und ϱ_b harmonisch geteilt. [Planim. § 120, 3, Anm. 4.]

Trägt man auf einer Geraden von einem Punkte derselben aus h_c und ϱ nach der einen, ϱ_c nach der anderen Seite hin ab, so ist h_c in den freien Endpunkten von ϱ und ϱ_c harmonisch geteilt.

Übungen. Zu beweisen, daß folgende Ausdrücke gleich 1 sind:

a) $2F \frac{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}{a + b + c}$. b) $2F \frac{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}}{a + b - c}$.

c) $\frac{(a + b + c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}{(a + b - c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}$. d) $\frac{(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}$.

e) $\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$
$s(s - a)(s - b)(s - c)$.

f) $\frac{(a + b + c)\, abc}{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) h_a h_b h_c \, 4r^2}$.

§ 11.

Aufgabe. Die Entfernung der Mittelpunkte des einem Dreieck umbeschriebenen und des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises aus den Radien dieser Kreise zu berechnen.

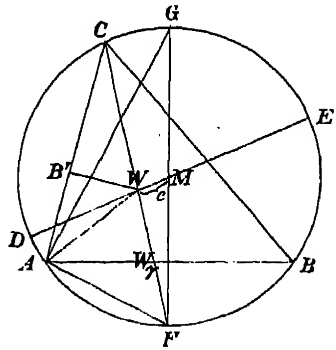

Fig. 4.

Auflösung. Verlängert man die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte M und W des um- und des einbeschriebenen Kreises bis zu den Schnittpunkten D und E mit dem umbeschriebenen Kreise und die Winkelhalbierende $CW\gamma$ bis zum Schnittpunkte F mit diesem Kreise, so ist $WE \cdot WD = WC \cdot WF$ oder, wenn man MW mit e und den Radius des umbeschriebenen Kreises mit r bezeichnet,

$$(r + e)(r - e) = WC \cdot WF \quad \text{oder}$$
$$e^2 = r^2 - WC \cdot WF.$$

Da $\angle WAF = \angle AWF = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, also $WF = FA$ ist, so folgt

$$(1) \quad e^2 = r^2 - WC \cdot FA.$$

Fällt man von W auf AC das Lot $WB' = \varrho$, verlängert MF über M hinaus bis zum Schnittpunkt G mit dem umbeschriebenen Kreise und verbindet G mit A, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $WB'C$ und FAG, daß $WC : WB' = FG : FA$ oder $WC \cdot FA = FG \cdot WB'$ oder (2) $WC \cdot FA = 2r \cdot \varrho$. Aus (1) und (2) folgt

$$e^2 = r^2 - 2r\varrho = r(r - 2\varrho) = (r - \varrho)^2 - \varrho^2.$$

Anmerkungen. 1. Auf gleiche Weise findet man für die Entfernung e_c des Mittelpunktes des umbeschriebenen und des der Seite $AB = c$ anbeschriebenen Kreises

$$e_c^2 = r^2 + 2r\varrho_c = r(r + 2\varrho_c) = (r + \varrho_c)^2 - \varrho_c^2.$$

2. Aus $e^2 = r^2 - 2r\varrho$ folgt, daß $r^2 \geqq 2r\varrho$ oder $r \geqq 2\varrho$, d. h. der Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist größer oder gleich dem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

§ 12.

Aufgabe. Aus den Seiten eines Trapezes den Flächeninhalt (F) zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet man die Höhe des Trapezes ABCD, d. h. den Abstand der beiden parallelen Seiten AB und CD, mit h, so ist $F = \frac{1}{2}(a + c)h$. Zieht man durch den einen Endpunkt der kleineren parallelen Seite CD, z. B. C, zu der nicht benachbarten der beiden nicht parallelen Seiten, also zu AD, die

Parallele CE, so ist die Höhe des Trapezes auch die zur Seite EB = a — c des entstandenen Dreiecks EBC gehörige Höhe; folglich ist nach Planim. § 113, 6, 2

$$h = \frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-a+c)(s'-b)(s'-d)},\ \text{wo } a-c+b+d=2s',$$

folglich $F = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{s'(s'-a+c)(s'-b)(s'-d)}.$

§ 13.

Aufgabe 1. Die Diagonalen eines Sehnenvierecks aus den Seiten zu berechnen.

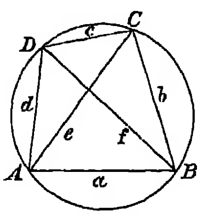

Fig. 5.

Auflösung. Im Sehnenviereck ABCD ist

$$F = \frac{abe + cde}{4r} = \frac{adf + bcf}{4r} \text{ nach § 9,}$$

folglich $\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$. Nun ist aber nach § 3

$ef = ac + bd$, folglich ist

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \text{ u. } f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Aufgabe 2. Den Inhalt (F) eines Sehnenvierecks aus den Seiten zu berechnen.

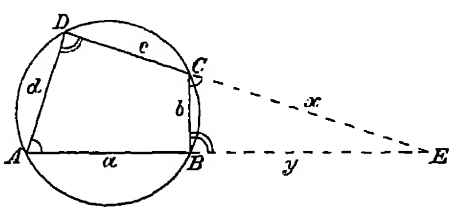

Fig. 6.

Auflösung. Denkt man sich die beiden gegenüberliegenden Seiten AB und CD bis zu ihrem Durchschnittspunkte E verlängert, so ist der Inhalt F des Sehnenvierecks gleich der Differenz der Inhalte F′ und F″ der Dreiecke AED und BEC. Diese beiden Dreiecke sind einander ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen;

folglich ist $F' : F'' = d^2 : b^2,\quad F' = \frac{d^2}{b^2}F''$ und

$$F = \left(\frac{d^2}{b^2} - 1\right)F'' = \frac{d^2-b^2}{b^2}F''.$$

Bezeichnet man CE mit x und BE mit y, so ist

$$F'' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+b)(-x+y+b)(x-y+b)(x+y-b)}.$$ Nun ist

$x : b = (y+a) : d,\quad dx - by = ab,$

$y : b = (x+c) : d,\quad bx - dy = -bc,$ folglich

$$x = \frac{b(ad+bc)}{d^2-b^2} \text{ und } y = \frac{b(ab+cd)}{d^2-b^2}, \text{ folglich}$$

$$x + y + b = \frac{b(ad + bc + ab + cd + d^2 - b^2)}{d^2 - b^2}$$
$$= \frac{b[a(d + b) + c(d + b) + (d - b)(d + b)]}{d^2 - b^2}$$
$$= \frac{b(a + c + d - b)}{d - b}, \quad \text{ebenso}$$
$$-x + y + b = \frac{b(-a + c + d + b)}{d + b}, \quad x - y + b = \frac{b(a - c + d + b)}{d + b},$$
$$x + y - b = \frac{b(a + c - d + b)}{d - b}. \quad \text{Daher ist}$$
$$F'' = \tfrac{1}{4}\frac{b^2}{d^2 - b^2}\sqrt{(a+c+d-b)(-a+c+d+b)(a-c+d+b)(a+c-d+b)},$$
folglich
$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)(-a+c+d+b)(a-c+d+b)(a+c-d+b)} \quad \text{oder}$$
$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad \text{wo} \quad a + b + c + d = 2s.$$

Anmerkung. Ist eine der vier Seiten des Sehnenvierecks ABCD, z. B. d, gleich Null, so geht die obige Formel über in die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks. [Planim. § 113, 6, a.]

3. Konstruktion algebraischer Ausdrücke. Auflösung von Aufgaben durch Rechnung.

§ 14.

Die Anwendung der Algebra auf geometrische Aufgaben ist auch dann zulässig und zuweilen sehr zweckmäßig, sogar unentbehrlich, wenn die bekannten Bestimmungen der Aufgabe (Strecken, Winkel und Flächen) nicht in Zahlen, sondern durch Zeichnung gegeben sind, und das Resultat ebenfalls durch Zeichnung dargestellt werden soll.

Man nimmt die Aufgabe als gelöst an, zeichnet eine ihren Bedingungen etwa entsprechende Figur, bezeichnet die gesuchten Strecken, auf deren Bestimmung die Auflösung der Aufgabe zurückgeführt wird, mit x, y, ... die bekannten Strecken mit a, b, c, ... (Planim. § 110, Anm.), stellt die durch die Aufgabe und die Figur bedingte Abhängigkeit der unbekannten und bekannten Größen durch so viele von einander unabhängige Gleichungen dar, als Unbekannte vorhanden sind, löst das erhaltene System von Gleichungen nach den Unbekannten auf und konstruiert die so durch Rechnung gewonnenen Ausdrücke.

Die einfachsten Formen, auf welche solche Ausdrücke, falls sie überhaupt mit Lineal und Zirkel konstruierbar sind, zurückgeführt werden können, sind die folgenden, wo m und n unbenannte ganze Zahlen bedeuten:

1) $x = a + b$ ist die Summe zweier Strecken,
2) $x = a - b$ die Differenz zweier Strecken,
3) $x = ma$ das $m$fache von a,
4) $x = \frac{a}{m}$ der $m$te Teil von a (Planim. § 84, Aufg.),
5) $x = \frac{ab}{c}$ die vierte Proportionale zu c, a und b (Planim. § 120, 1; § 138, Lehrs. 1 und 2),
6) $x = \frac{a^2}{b}$ die dritte Proportionale zu b und a (Planim. § 120, 2; § 135, Lehrs. 1 und 2; § 138, Lehrs. 3, Zus. 1),
7) $x = \sqrt{ab}$ die mittlere Proportionale zwischen a und b (Planim. § 136, 1; § 138, Lehrs. 3, Zus. 1),
8) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind,
9) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a, und dessen andere Kathete b ist; oder, da $x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, die mittlere Proportionale zwischen $a + b$ und $a - b$,
10) $x = a\sqrt{m} = \sqrt{m \,.\, a^2} = \sqrt{a \,.\, ma}$ die mittlere Proportionale zwischen a und ma.

Nur selten gelangt man zu komplizierteren Ausdrücken, welche unmittelbar eine bestimmte geometrische Bedeutung haben und eine einfachere Darstellung zulassen, als die Zurückführung auf die erwähnten Formen ergiebt. Dergleichen sind

$\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Planim. § 113, 5, 1); $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ (Planim. § 113, 6, 1);

$\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ (Planim. § 113, 6, 2);

$\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$ (Planim. § 113, 6, 4);

$\sqrt{a^2+b^2\pm 2ac}$ [§ 1]; $\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ [§ 7]; $\sqrt{2(a^2+b^2-2c^2)}$ [§ 7];

$\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (Planim. § 142, 1, d).

§ 15.

In vielen Fällen beruht die rein geometrische Lösung der Aufgaben auf denselben Konstruktionen, welche sich aus der durch Rechnung gefundenen Formel ergeben, wie z. B. in der Aufgabe 6 des § 136 der Planimetrie.

Bezeichnet man nämlich mit g und h die Grundlinie und Höhe des gegebenen ungleichseitigen, mit x und y die gleichnamigen Stücke des verlangten gleichseitigen Dreiecks, so ist

$$\frac{gh}{2} = \frac{xy}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{x}{2}\sqrt{3} \text{ (Planim. § 113, 5, 1), also}$$

$$gh = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\frac{2\,gh}{\sqrt{3}}},$$

$$\text{demnach} \quad y = \sqrt{\frac{gh\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{2}\cdot h}.$$

Nun ist $\frac{g\sqrt{3}}{2}$ die Höhe eines über g konstruierten gleichseitigen Dreiecks und y die mittlere Proportionale zwischen dieser Höhe und der Höhe h des gegebenen Dreiecks.

Dasselbe gilt auch von Planim. § 139, Aufg., vergl. Planim. § 142, Aufg. 1, d.

Bei manchen Aufgaben ist die rein geometrische Auflösung viel einfacher und leichter, bei anderen, wenn überhaupt schon gelungen, bedeutend schwieriger als die Konstruktion, welche die algebraische Lösung erfordert.

§ 16.

Übungen.

x zu konstruieren, wenn

1) $x = a + b - c + d$. 2) $x = 2a + \frac{b}{3} - \frac{3}{4}c$. 3) $x = \frac{ab}{a+b}$.

4) $x = \frac{ac + bc}{d}$. 5) $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. 6) $x = \frac{abc}{de}$. [Setze $\frac{ab}{d} = y$ (1); dann ist $x = \frac{y \cdot c}{e}$ (2). Aus (1) findet man y nach § 14, 5, dann aus (2) x ebenfalls nach § 14, 5.] 7) $x = \frac{a^3}{bc}$. 8) $x = \frac{abcd}{efg}$. 9) $x = \frac{a^4}{b^2c}$.

10) $x = \frac{a^5}{b^2c^2}$. 11) $x = \sqrt{\frac{ab}{m}}$. $\left[x = \sqrt{\frac{a}{m}\cdot b}.\right]$ 12) $x = \sqrt{\frac{mab}{n}}$.

13) $x = \sqrt{\frac{abc}{d}}$. $\left[x = \sqrt{\frac{ab}{d}\cdot c}.\right]$ 14) $x = \sqrt{ab + cd}$.

[$x = \sqrt{a\left(b + \frac{cd}{a}\right)}$; oder man setze $y = \sqrt{ab}$, $z = \sqrt{cd}$, dann ist $x = \sqrt{y^2 + z^2}$.] 15) $x = \sqrt{a^2 + b^2 \pm c^2}$. 16) $x = \sqrt{a^2 \pm ab + b^2}$.

17) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$. 18) $x = a\sqrt{2}$. [$x = \sqrt{a \cdot 2a}$; oder

$x = \sqrt{a^2 + a^2}$; oder $x = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; oder Planim. § 142, 1, b.]

19) $x = a\sqrt{3}$. [$x = \sqrt{a \cdot 3a}$; oder $x = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$; oder $x = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}$; oder Planim. § 142, 1, c; oder x ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 2 a.] 20) $x = a\sqrt{5}$.

21) $x = \sqrt{ab\sqrt{2}}$. 22) $x = \frac{a}{2}\sqrt[4]{3}$. 23) $x = \sqrt[4]{abcd}$.

24) $x = \frac{a^2 + b^2}{2c}$. 25) $x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3d}$. 26) $x = \frac{abc}{de + fg}$.

---

27) Zur Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC eine Parallele XY so zu ziehen, daß XY = AX. [Man kann die Parallele XY ziehen, wenn man die Lage des Punktes X auf AC (oder des Punktes Y auf BC) kennt. Bezeichnet man AX mit x, so ist, da XY = AX, auch XY = x, und es ergiebt sich aus der Figur

$$x : c = (b - x) : b,$$
$$bx = bc - cx,$$
$$(b + c)x = bc,$$
$$(b + c) : c = b : x.$$

Man ziehe von C aus einen beliebigen Strahl, trage auf diesem b + c ab bis D, trage auf der Strecke DC von D aus c ab bis E, verbinde D mit A und ziehe zu DA durch E die Parallele; diese schneidet AC in X. Siehe auch Planim. § 49, 19.]

28) Zur Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC eine Parallele XY so zu ziehen, daß

a) CY = AX. b) AX + BY = AB. c) XY = BY + AX.
d) XY = BY + CX. e) $XY^2 = CY \cdot BC$. f) $XY^2 = BY \cdot CY$.
g) $XY^2 = BY \cdot CX$.

29) Eine feste Strecke AB = a im Punkte X so zu teilen, daß

a) $AX^2 - BX^2 = AB \cdot BX$. b) $AX^2 - BX^2 = b^2$.
c*) $AX^2 + BX^2 = b^2$. d*) $AX^2 = 2 \cdot BX^2$.
e*) $AX^2 = 3 \cdot BX^2$. f*) $AX^2 = 2AB \cdot BX$.
g*) $AX \cdot BX = AX^2 - BX^2$.

30) Auf der Verlängerung der festen Strecke AB = a über B hinaus einen Punkt X so zu bestimmen, daß

a*) $BX^2 = AB \cdot AX$. b*) $AB^2 = BX \cdot AX$. c*) $AX \cdot BX = b^2$.
d) die von A an den Kreis, welcher BX als Durchmesser hat, gezogene Tangente gleich $2 \cdot AB$ ist. e*) die von A an den Kreis, welcher BX als Durchmesser hat, gezogene Tangente gleich BX ist.

---

*) Die mit einem * hinter der laufenden Nummer versehenen Aufgaben führen auf gemischte quadratische Gleichungen.

31) Von einem festen Punkte P nach einem festen Kreise M eine Sekante so zu ziehen, daß

a) der äußere und der innere Abschnitt gleich werden. [Die Sekante möge den Kreis in X und Y schneiden, dann ist nach der Aufgabe $PX = XY$; man bezeichnet PX mit x. Bezeichnet man ferner die eine der beiden von P an den Kreis gelegten bekannten Tangenten PA mit a, so ist $x \cdot 2x = a^2$; $x^2 = \frac{a^2}{2}$; $x^2 = a \cdot \frac{a}{2}$; d. h. x ist die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{1}{2}a$. Andere Lösung: Die von P durch M gezogene Sekante schneide den Kreis in B und C. Bezeichnet man die bekannte Strecke PB mit b und den bekannten Radius mit c, so ist $x \cdot 2x = b(b + 2c)$; $x^2 = \frac{1}{2}b \cdot (b + 2c)$; d. h. x ist die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{2}b$ und $b + 2c$. [Bezeichnet man PM mit d, so ist $x \cdot 2x = (d + c)(d - c)$ u. s. w.] In beiden Fällen ist die Konstruktion sehr einfach.] b) das Rechteck aus dem äußeren und dem inneren Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrat wird. c*) sich der innere Abschnitt zum äußeren verhält wie $m : n$ ($2 : 1$; $1 : 2$; $3 : 2$). d*) das Rechteck aus der Sekante und dem inneren Abschnitte derselben gleich einem gegebenen Quadrat wird.

32) Durch einen festen Punkt innerhalb eines festen Kreises eine Sehne so zu ziehen, daß a) das Rechteck aus der Sehne und dem einen Abschnitte derselben gleich einem gegebenen Quadrat wird. b*) sich die Abschnitte verhalten wie $m : n$ ($1 : 4$; $1 : 2$; $3 : 4$). c*) der eine Abschnitt um eine gegebene Strecke a größer als der andere Abschnitt ist. d*) sie in dem Punkte stetig geteilt wird.

33) In einem festen Kreise eine Sehne so zu ziehen, daß a*) der Abstand derselben vom Mittelpunkte die mittlere Proportionale zwischen der Sehne und dem Radius ist. b*) der Radius die mittlere Proportionale zwischen ihr und ihrem Abstande vom Mittelpunkte ist.

34) Auf einem festen Kreise einen Punkt zu finden, so daß a*) die Summe, b*) die Differenz der beiden nach den Endpunkten eines festen Durchmessers gezogenen Sehnen gleich einer gegebenen Strecke ist.

35*) Außerhalb eines festen Kreises einen Punkt so zu bestimmen, daß sein Abstand vom Mittelpunkte die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und der Summe der beiden von dem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten ist.

36*) Auf der in dem einen Endpunkte eines festen Kreisdurchmessers an den Kreis gezogenen Tangente einen Punkt so zu bestimmen, daß der äußere Abschnitt der von ihm nach dem anderen Endpunkte des Durchmessers gezogenen Sekante gleich dem Durchmesser ist.

37) Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

38) Ein a) Quadrat, b) Rechteck in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

39) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von dem gegeben ist a*) die Summe (Differenz) zweier benachbarten Seiten. b*) das Verhältnis zweier benachbarten Seiten. c*) die Summe (Differenz) der Quadrate zweier benachbarten Seiten. d*) die Diagonale.

40) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Hypotenuse gegeben ist, und in welchem die größere Kathete a*) das arithmetische Mittel, b*) die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete ist.

41) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus a*) b, p. b) $c \pm b, p$. c*) $c \pm a, p$. d*) $c, a \pm p$. e*) $q, p \pm h_c$. f*) $a + b, F$. g*) $a \pm b, c$. h*) $a + b + c, h_c$. i*) $a + b + c, F$. k*) $a + b, h_c$.

42) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus h_c und a*) $a + c$. b*) h_a.

43) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a \pm b$ und a*) p, q. b*) c, s_c.

44) Ein Dreieck zu konstruieren aus a) $h_c, a + b, c$. b) $h_c, a - b, c$. c) $h_c, a + b, p - q$. d) $h_c, a - b, p - q$. [Zu a): Ist im Dreieck ABC die Seite AB gleich k, die zugehörige Höhe gleich l, die Summe der beiden anderen Seiten gleich m, die größere dieser beiden Seiten gleich x, die kleinere gleich y, so ist

$$\tfrac{1}{2}kl = \sqrt{\frac{m+k}{2}\cdot\frac{m-k}{2}\cdot\frac{k+x-y}{2}\cdot\frac{k-x+y}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{m^2 - k^2}\,.\,\sqrt{k^2 - (x-y)^2};\ \text{hieraus } x - y.$$

Bei c) und d) ist noch zu berücksichtigen Planim. § 101, 100.]

45) Ein gegebenes Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite zu halbieren.

46) Ein gegebenes Trapez durch eine Parallele zu den Grundlinien zu halbieren.

47) Ein gegebenes Dreieck durch Parallele zu einer Seite in a) 3, b) 4, c) 5 gleiche Teile zu teilen.

48) Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine Gerade, welche mit der Seite AB einen gegebenen Winkel bildet, zu halbieren. [Die gesuchte Gerade möge AB in X und BC in Y schneiden, dann ist $\triangle ABC : \triangle XBY = 2 : 1$. Man ziehe durch A die Parallele zu XY, welche BC in D schneidet; dann sind $BD = a_1$ und $CD = a_2$ bekannte Strecken. Man bilde $\triangle ABC : \triangle ABD$ und $\triangle ABD : \triangle XBY$; hieraus ergiebt sich $\triangle ABC : \triangle XBY$.]

49) In ein rechtwinkliges Dreieck ein Quadrat so einzubeschreiben, daß es mit dem Dreieck den rechten Winkel gemeinschaftlich hat.

50) In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu beschreiben, daß zwei Ecken des Quadrates auf einer Seite liegen, und die beiden anderen Ecken auf den beiden anderen Seiten.

51) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, von welchem gegeben ist a) der Umfang. b) die Gestalt. c*) der Inhalt.

52) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten auf den Seiten des ursprünglichen Dreiecks senkrecht stehen.

53*) In ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat zu beschreiben, daß zwei Ecken des Quadrates auf einer Seite liegen, und die beiden anderen Ecken auf den beiden anderen Seiten.

54) In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, daß Quadrat und Dreieck eine Ecke gemeinschaftlich haben.

55) In (Um) ein gegebenes Quadrat ein anderes Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten gleich einer gegebenen Strecke sind.

56) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, welches halb so groß wie das ursprüngliche Dreieck ist.

4. Vermischte Übungen.

§ 17.

1a. Zieht man durch einen beliebigen Punkt innerhalb eines Kreises zwei Sehnen, so ist jeder der von ihnen gebildeten Winkel gleich der Summe der Umfangswinkel, welche über den zwischen den Schenkeln des Winkels und denen seines Scheitelwinkels liegenden Bogen stehen.

1b. Zieht man durch einen beliebigen Punkt außerhalb eines Kreises zwei Sekanten (eine Sekante und eine Tangente), so ist der von ihnen gebildete Winkel gleich der Differenz der beiden Umfangswinkel, welche über den zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegenden Bogen stehen.

2. Wenn zwei Tangenten eines Kreises einander schneiden, und man legt durch beliebige Punkte des zwischen den Berührungspunkten gelegenen kleineren Bogens Tangenten an den Kreis, so sind die Umfänge der so entstandenen Dreiecke einander gleich und zwar gleich der Summe der beiden gegebenen Tangenten. (Wie lautet der Satz für Punkte des größeren Bogens?)

3. Zwei feste einander schneidende gerade Linien durch eine Gerade so zu schneiden, daß durch dieselbe ein Dreieck von gegebenem Umfange abgeschnitten wird, und die Gerade a) durch einen festen Punkt geht. b) einer festen Geraden parallel ist. c) eine feste Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet.

4. Ein Dreieck zu konstruieren aus a) s, w_γ, γ. b) $s, \gamma, \angle (c w_\gamma)$.

5. Wenn man durch den einen Durchschnittspunkt zweier einander schneidenden Kreise zu der Mittelpunktsgeraden die Parallele zieht, so ist die Summe der entstandenen Sehnen größer als für jede andere Gerade durch den Durchschnittspunkt.

6. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier einander schneidenden Kreise eine Gerade so zu ziehen, daß a) zu den in beiden Kreisen entstandenen Sehnen gleiche Mittelpunktswinkel gehören [Planim. § 21, 27]. b) die Summe der in beiden Kreisen entstandenen Sehnen gleich einer gegebenen Strecke ist. c) die in beiden Kreisen entstandenen Sehnen gleich sind.

7. Konstruiert man über zwei Seiten eines Dreiecks nach außen je ein Parallelogramm, verlängert die diesen Dreiecksseiten gegenüberliegenden Seiten der Parallelogramme bis zu ihrem Durchschnittspunkte, verbindet den Durchschnittspunkt mit der der dritten Dreiecksseite gegenüberliegenden Dreiecksecke, zieht zu dieser Verbindungsgeraden durch die Endpunkte der dritten Dreiecksseite die Parallelen und verbindet die Durchschnittspunkte dieser Parallelen und der verlängerten Seiten der Parallelogramme miteinander, so bilden diese Verbindungsstrecke, die beiden Parallelen und die dritte Dreiecksseite ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden ersten Parallelogramme ist. (Satz des Pappus.)

8. Mit Hilfe des Satzes des Pappus den des Pythagoras zu beweisen.

9. Konstruiert man über den drei Seiten eines Dreiecks nach außen Quadrate und verbindet die Endpunkte je zweier Quadratseiten, die von demselben Eckpunkt des Dreiecks auslaufen und nicht Seiten des Dreiecks sind, so ist jedes der drei entstandenen Dreiecke gleich dem gegebenen Dreiecke. [Planim. § 114, 9.]

10. Konstruiert man über den vier Seiten eines Vierecks nach außen Quadrate und verbindet die Endpunkte je zweier Quadratseiten, die von demselben Eckpunkt des Vierecks auslaufen und nicht Seiten des Vierecks sind, so ist die Summe je zweier gegenüberliegenden Dreiecke gleich dem Viereck.

11. Die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

---

12. Eine gerade Linie so zu ziehen, daß die von zwei festen Punkten auf sie gefällten Senkrechten in einem gegebenen Verhältnisse stehen. (Unbestimmt.)

13. Durch einen festen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß die von zwei anderen festen Punkten auf sie gefällten Senkrechten in einem gegebenen Verhältnisse stehen. (2 Lösungen.)

14. Eine gerade Linie so zu ziehen, daß die von drei festen Punkten auf sie gefällten Senkrechten sich wie drei gegebene Strecken zu einander verhalten. (4 Lösungen.)

15. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier festen Kreise eine Sekante so zu ziehen, daß die entstandenen Sehnen in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

16. Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreise eine beliebige Sekante, so verhalten sich die entstandenen Sehnen wie die entsprechenden Radien.

17. Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreise zwei beliebige Sekanten und verbindet je zwei auf demselben Kreise liegende Endpunkte derselben miteinander, so sind die beiden entstandenen Dreiecke einander ähnlich.

18. Den geometrischen Ort der Punkte zu finden, deren Entfernungen von zwei festen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

19. Auf einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den beiden anderen Seiten in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

20. Einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

---

21. Ein Dreieck zu konstruieren aus $a \pm b$, p, q. [Aus $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ folgt $(a + b)(a - b) = (p + p)(p - q)$ oder $(a + b) : (p + q) = (p - q) : (a - b)$.]

---

22. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ACB $\gamma = 1R$ und

a) $a^2 = cb$, so ist $b = p$, $p^2 = cq$ und $h_c{}^2 = bq$. (In Worten?)
b) $b = p$, so ist $a^2 = cb$, $p^2 = cq$ und $h_c{}^2 = bq$.
c) $p^2 = cq$, so ist $b = p$, $a^2 = cb$ und $h_c{}^2 = bq$.
d) $h_c{}^2 = bq$, so ist $b = p$, $a^2 = cb$ und $p^2 = cq$.
e) $p^2 = ah_c$, so ist $h_c{}^2 = bq$, $a^2 = cb$, $b = p$ und $p^2 = cq$.

23. Im rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Quadrate über den Katheten wie die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

24. Im rechtwinkligen Dreieck verhält sich das Quadrat über der Hypotenuse zu dem Quadrate über jeder Kathete wie die Hypotenuse zu der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.

25. Zwei Quadrate zu konstruieren, die sich wie zwei gegebene Strecken verhalten.

26. Eine feste Strecke so zu teilen, daß sich die Quadrate der Teile wie zwei gegebene Strecken verhalten.

27. Zwei Strecken zu zeichnen, die sich wie zwei gegebene Quadrate verhalten.

28. Eine feste Strecke so zu teilen, daß sich die Teile wie zwei gegebene Quadrate verhalten.

29. Auf einer festen Strecke einen Punkt zu finden, daß das Rechteck aus a) der Strecke und dem einen der beiden Teile, b) den beiden Teilen gleich einem gegebenen Quadrate (Dreiecke, Vielecke) ist.

30. Auf der Verlängerung einer festen Strecke einen Punkt zu finden, daß das Rechteck aus der gegebenen Strecke und a) der Verlängerung, b) der ganzen durch die Verlängerung erhaltenen Strecke gleich einem gegebenen Quadrate ist.

31. Werden zwei parallele Tangenten eines Kreises durch eine dritte Tangente geschnitten, so ist der Radius die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der dritten.

32. Wenn zwei Kreise einander von außen berühren, so ist jede äußere gemeinschaftliche Tangente (zwischen den beiden Berührungspunkten) die mittlere Proportionale zwischen den beiden Durchmessern. [Die gemeinschaftliche innere Tangente halbiert die äußere.]

33. In einen festen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ABC ähnlich ist. [Man beschreibt um ABC den Kreis, verbindet den Mittelpunkt M desselben mit A, B und C, zieht in dem festen Kreise die Radien KA′, KB′ und KC′ so, daß $\angle$ A′KB′ = AMB und $\angle$ A′KC′ = AMC, dann sind A′B′C′ die Ecken des gesuchten Dreiecks. Unbestimmte Aufgabe.]

34. Um einen festen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

35. In einen festen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Rechteck ähnlich ist.

36. Um einen festen Kreis einen Rhombus zu zeichnen, welcher einem gegebenen Rhombus ähnlich ist.

37. In ein festes Dreieck ABC ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck DEF ähnlich ist, und von welchem die der Seite DE entsprechende Seite der Seite AB parallel ist. [Man zeichnet ein Dreieck D′E′F′, dessen Seite D′E′ der Seite AB parallel ist, dessen Ecken D′ und E′ bez. auf AC und BC liegen, und welches dem Dreieck DEF ähnlich ist, und zwar so, daß F′ und C auf entgegengesetzten Seiten von D′E′ liegen; man sieht also zunächst von der Forderung ab, daß die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks auf der dritten Seite AB des festen Dreiecks ABC liegen soll. Diesen Bedingungen genügen unzählig viele Dreiecke. Dann legt man durch die der Seite AB gegenüberliegende Ecke C und durch F′ die Gerade, welche AB in F″ schneiden möge, zieht durch F″ zu F′D′ und F′E′ die Parallelen, welche AC und BC bez. in D″ und E″ schneiden, und verbindet D″ mit E″; dann ist D″E″F″ das gesuchte Dreieck. Der Beweis ergiebt sich aus Planim. § 136, 4.]

516·24

38. In ein festes Dreieck ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, und von welchem eine Seite a) auf einer Seite des festen Dreiecks senkrecht steht. b) einer festen Geraden parallel ist.

39. In ein festes Dreieck einen Rhombus zu zeichnen, der mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

40. In ein festes Dreieck ein Rechteck (Rhombus, Parallelogramm) zu zeichnen, welches einem gegebenen Rechteck (Rhombus, Parallelogramm) ähnlich ist, und von welchem zwei Ecken auf einer Seite, die beiden anderen Ecken auf den beiden anderen Seiten des festen Dreiecks liegen.

41. In ein festes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen, von welchem zwei Ecken auf einer Seite, die beiden anderen Ecken auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks liegen.

---

42. Die Endpunkte einer beliebigen Seite eines Dreiecks und die Fußpunkte der zu den beiden anderen Seiten gehörigen Höhen sind die Ecken eines Sehnenvierecks; die Seite ist ein Durchmesser des zugehörigen Kreises. [a) Alle Dreieckswinkel seien spitz. b) $\gamma > 1\,R$. c) $\gamma = 1\,R$.]

43. Die Fußpunkte der zu zwei beliebigen Seiten eines Dreiecks gehörigen Höhen, die der dritten Seite gegenüberliegende Ecke und der Höhendurchschnitt sind die Ecken eines Sehnenvierecks; die Verbindungsstrecke der Ecke und des Höhendurchschnittes ist ein Durchmesser des zugehörigen Kreises.

44. Die durch die Verbindungsgeraden der Fußpunkte je zweier Höhen eines Dreiecks abgeschnittenen Dreiecke sind dem ursprünglichen Dreiecke ähnlich. [Da ABH_aH_b ein Sehnenviereck ist, so ist $\angle BH_aH_b = 2R - \alpha$, also $\angle CH_aH_b = \alpha$; ebenso ergiebt sich, daß $\angle BH_aH_c = \alpha$; $\angle CH_bH_a = AH_bH_c = \beta$ und $\angle AH_cH_b = BH_cH_a = \gamma$.]

45. Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel, bezw. die Außenwinkel des Dreiecks, welches die Fußpunkte der Höhen des ursprünglichen Dreiecks als Ecken hat, des s. g. Fußpunktdreiecks.

46. Für das Fußpunktdreieck ist der Schnittpunkt der Höhen des ursprünglichen Dreiecks der Mittelpunkt des einbeschriebenen oder eines der drei anbeschriebenen Kreise und sind die Eckpunkte des ursprünglichen Dreiecks die Mittelpunkte der drei anderen Kreise.

---

47. Die Senkrechte auf einer Seite eines Dreiecks in dem einen der beiden Endpunkte bis zum Schnitt mit dem umbeschriebenen Kreise ist gleich dem oberen Abschnitte der zu dieser Seite gehörigen Höhe. [Die auf AB in A errichtete Senkrechte schneide den Kreis in D. Da $DA \perp AB$ und $CH_c \perp AB$, so ist $DA \parallel CH$. Da ABCD ein Sehnenviereck und $\angle DAB = 1\,R$, so ist auch $\angle DCB = 1\,R$, folglich $DC \parallel AH$.]

48. Der obere Abschnitt der zu einer beliebigen Seite eines Dreiecks gehörigen Höhe ist doppelt so groß wie die Entfernung des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises von dieser Seite. [Da BD ein Durchmesser des umbeschriebenen Kreises und $DA \parallel MS_c$, so ist $DA = 2 \,.\, MS_c$, also auch $CH = 2.\,MS_c$; ebenso ist auch $AH = 2 \,.\, MS_a$ und $BH = 2 \,.\, MS_b$.]

49. Die zu einer beliebigen Seite eines Dreiecks gehörige Seitenhalbierende wird durch die Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte der Höhen H und der Mittelsenkrechten auf den Seiten M im Verhältnisse 2 : 1 geteilt,

und zwar ist der der Ecke anliegende Abschnitt der Seitenhalbierenden der größere. [CS_c wird also durch HM im Durchschnittspunkte S der Seitenhalbierenden geschnitten; ebenso AS_a und BS_b.]

50. In jedem Dreiecke liegen die Schnittpunkte der Höhen H, der Seitenhalbierenden S und der Mittelsenkrechten auf den Seiten M auf einer geraden Linie, und zwar ist $HS = 2 \cdot SM$. (Eulers Satz.)

51. In jedem Dreieck ist der Halbierungspunkt des oberen Abschnittes einer beliebigen Höhe von dem Halbierungspunkte der zugehörigen Seite um den Radius des umbeschriebenen Kreises entfernt.

52. In jedem Dreieck halbieren die Verbindungsstrecken der Halbierungspunkte der oberen Abschnitte der Höhen mit den Halbierungspunkten der zugehörigen Seiten und die Verbindungsstrecke des Durchschnittspunktes der Höhen mit dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises einander.

53. Die Halbierungspunkte der oberen Abschnitte der Höhen eines beliebigen Dreiecks, die Halbierungspunkte der Seiten und die Fußpunkte der Höhen liegen auf einem Kreise. Der Mittelpunkt F dieses Kreises ist der Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke des Durchschnittspunktes H der Höhen mit dem Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises, der Radius gleich der Hälfte des Radius des umbeschriebenen Kreises. (Der Feuerbachsche Kreis oder der Kreis der neun Punkte.)

54. Die Verbindungsstrecke des Durchschnittspunktes H der Höhen eines Dreiecks und des Durchschnittspunktes S der Seitenhalbierenden wird in dem Mittelpunkte F des Feuerbachschen Kreises und dem Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises harmonisch geteilt. Es ist $FH : FS = MH : MS = 3 : 1$.

55. Ein Dreieck zu konstruieren aus a) H_c, C, M. b) H, H_a, H_b. c) H, A, B. d) C, M, S. e) C, M, S_c. f) S, M, S_c. g) C, H_a, S. h) H_a, H_b, H_c. i) H, S, S_c. k) H, S, H_c. l) H, M, S_c. m) H, M, H_c. n) H, C, S. o) H, C, S_c. p) H, C, M.

---

56. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in welchem die Hypotenuse durch den Fußpunkt der zu ihr gehörigen Höhe stetig geteilt wird, und von dem gegeben ist a) c. b) a. c) b. d) h_c. e) p. f) q. g) s_c. h) s_a. i) s_b. k) $a + b$. l) $c + a$. m) $c + b$.

57. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten in stetiger Proportion stehen, und in welchem eins der Stücke a) bis m) in 56 gegeben ist. [§ 17, 22.]

58. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in welchem die kleinere Kathete gleich der Projektion der größeren auf die Hypotenuse ist, und in welchem eins der Stücke a) bis m) in 56 gegeben ist.

---

59. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 geht und eine feste Gerade g berührt. [Lösung § 54, Aufg. 2.]

60. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei feste gleich große Kreise M_1 und M_2 und eine feste Gerade g berührt. [Der gesuchte Kreis X ist einem anderen Kreise konzentrisch, der nach 59 zu zeichnen ist.]

61. Einen Kreis zu zeichnen, der eine feste Gerade g_1 in einem festen

Punkte P berührt und eine andere feste Gerade g_2 unter einer gegebenen Sehne schneidet.

62. Einen Kreis zu zeichnen, der einen festen Kreis M in einem festen Punkte P berührt und eine feste Gerade g unter einer gegebenen Sehne schneidet. [61.]

63. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen festen Punkt P geht und zwei feste Gerade g_1 und g_2 berührt. [Siehe § 54, Aufg. 4.]

64. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei feste Gerade g_1 und g_2 und einen festen Kreis M berührt. [Der gesuchte Kreis ist einem anderen konzentrisch, der nach 63 zu zeichnen ist. Siehe § 54, Aufg. 8.]

65. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 geht, so daß die von einem dritten festen Punkte P_3 an ihn gezogenen Tangenten eine gegebene Länge l haben. [Die eine der beiden von P_3 an den gesuchten Kreis X gelegten Tangenten berühre den Kreis in Y, und die Gerade P_3P_1 schneide diesen Kreis in Z; dann ist Z bestimmt, da $P_3P_1 \,.\, P_3Z = P_3Y^2 = l^2$.]

66. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen festen Punkt P_1 geht, so daß die von zwei anderen festen Punkten P_2 und P_3 an ihn gezogenen Tangenten gegebene Längen haben. [65.]

67. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 geht und einen festen Kreis M berührt. [Siehe § 54, Aufg. 3.]

68. Einen Kreis zu zeichnen, der eine feste Gerade g und zwei feste Kreise M_1 und M_2 $(r_1 > r_2)$ berührt. [Siehe § 54, Aufg. 9.]

69. Von einem festen Punkte nach einem festen Kreise eine Sekante zu ziehen, so daß der innere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte ist. [Man mache den inneren Abschnitt gleich der Tangente von dem Punkte an den Kreis.]

70. Von einem festen Punkte P nach einem festen Kreise M eine Sekante zu ziehen, so daß der äußere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem inneren Abschnitte ist. [Die gesuchte Sekante schneide den Kreis in X und Y, so daß $PX^2 = PY \,.\, XY$ ist. Legt man von P an den Kreis die eine der beiden Tangenten PA und zieht zu der Verbindungsgeraden AY durch X die Parallele XZ, so ist auch $PZ^2 = PA \,.\, ZA$, woraus sich der Punkt Z ergiebt. Aus $PY : PA = PA : PX$ und $PY : PA = PX : PZ$ folgt $PX^2 = PA \,.\, PZ$, und hieraus findet man PX. Oder Konstruktion wie bei der folgenden Aufgabe.]

71. Durch einen festen Punkt P innerhalb eines festen Kreises M eine Sehne so zu ziehen, daß sie in P stetig geteilt wird. [Die gesuchte Sehne schneide den Kreis in X und Y, so daß $PX^2 = PY \,.\, XY$ ist. Verbindet man P mit M, zieht zu dem Radius MX durch Y die Parallele, welche MP in Z schneidet, so ist auch $PM^2 = PZ \,.\, MZ$, woraus sich Z ergiebt. Aus $ZY : MX = PZ : PM$ findet man ZY. Oder Konstruktion wie bei der vorhergehenden Aufgabe, nur zeichnet man statt der Tangente PA die Senkrechte PA auf PM.]

B. Hauptsätze der neueren Geometrie.

1. Sätze des Ceva, des Menelaos und des Pascal.

§ 18.

1. Satz des Ceva. Wenn drei beliebige durch die Ecken eines Dreiecks gehende Gerade einander in einem Punkte schneiden, so teilen sie die Seiten so, daß die Produkte (der Maßzahlen) je dreier nicht in ihren Endpunkten aneinander stoßenden Abschnitte der Seiten einander gleich sind.

Behauptung. [Fig. 7a, b, c.]

$$C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, A'C \,.\, B'A.$$

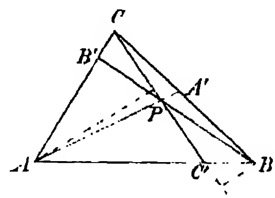

Fig. 7a.

Beweis. Die drei Teilpunkte liegen entweder auf den Seiten selbst, oder ein Teilpunkt liegt auf einer Seite selbst und die beiden anderen Teilpunkte auf den Verlängerungen der beiden anderen Seiten, je nachdem der Schnittpunkt P der drei Geraden innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt.

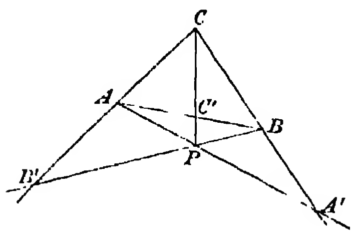

Fig. 7b.

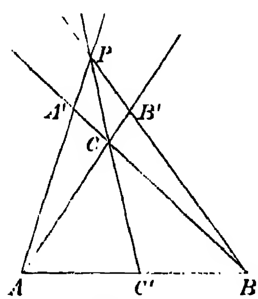

Fig. 7c.

Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ACP und BCP verhalten sich wie die von A und B auf CP gefällten Senkrechten [Planimetrie §112, 3 und Anm.] und diese wie C'A und C'B. Folglich ist auch

$$ACP : BCP = C'A : C'B;$$

ebenso ist $CBP : ABP = B'C : B'A$

und $BAP : CAP = A'B : A'C,$

$$\overline{1 : 1 = (C'A \,.\, B'C \,.\, A'B) : (C'B \,.\, B'A \,.\, A'C),}$$

$$C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, B'A \,.\, A'C$$

oder $C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, A'C \,.\, B'A.$

Sind die drei Geraden einander parallel, so folgt die Behauptung aus den beiden Proportionen:

$$C'A : C'B = CA' : CB$$

und $B'C : B'A = BC : BA'$.

2. Umkehrung. Wenn die Seiten eines Dreiecks in drei Punkten, die entweder auf den Seiten selbst liegen, oder von denen einer auf einer Seite selbst und die beiden anderen auf den Verlängerungen der beiden anderen Seiten liegen, so geteilt sind, daß die Produkte je dreier nicht in ihren Endpunkten aneinander stoßenden Abschnitte der Seiten einander gleich sind, so schneiden die Verbindungsgeraden der Teilpunkte mit den den zugehörigen Seiten gegenüberliegenden Ecken einander in einem Punkte.

Voraussetzung. [Fig. 7a, b, c.]

$$C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, A'C \,.\, B'A.$$

Behauptung. AA', BB' und CC' schneiden einander in einem Punkte.

Beweis (indirekt). C' liege auf der Seite AB selbst, der Schnittpunkt von AA' und BB' sei P. Angenommen CC' ginge nicht durch P, so müßte die durch C und P gelegte Gerade die Seite AB in einem Punkte C'' schneiden, und es wäre dann nach dem Lehrsatze des Ceva

$$C''A \,.\, B'C \,.\, A'B = C''B \,.\, A'C \,.\, B'A.$$

Nach der Voraussf. ist aber $C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, A'C \,.\, B'A$,

folglich wäre $C''A : C'A = C''B : C'B$.

Dies ist aber unmöglich, da C' und C'' auf der Seite AB selbst liegen [Planim. § 120, Anm. 2].

§ 19.

1. Satz des Menelaos. **Wenn die drei Seiten eines Dreiecks bez. die Verlängerungen derselben von einer Geraden geschnitten werden, so sind die Produkte je dreier nicht in ihren Endpunkten aneinander stoßenden Abschnitte der Seiten einander gleich.**

Behauptung. [Fig. 8a und b.]

$$C'A \,.\, B'C \,.\, A'B = C'B \,.\, A'C \,.\, B'A.$$

Beweis. Die drei Schnittpunkte liegen entweder sämtlich auf den Verlängerungen der drei Seiten, oder ein Schnittpunkt liegt auf der Verlängerung einer Seite und die beiden anderen Schnittpunkte auf den beiden anderen Seiten selbst.

Zieht man durch eine beliebige Ecke, z. B. A, zu der schneidenden Geraden die Parallele, welche die gegenüberliegende Seite BC in A'' schneiden möge, dann ist

$$C'A : C'B = A'A'' : A'B$$
und
$$B'C : B'A = A'C : A'A'',$$
$$(C'A . B'C) : (C'B . B'A) = A'C : A'B,$$
$$C'A . B'C . A'B = C'B . B'A . A'C$$
oder
$$C'A . B'C . A'B = C'B . A'C . B'A.$$

2. Umkehrung. Wenn die Seiten eines Dreiecks in drei Punkten, die entweder auf den Verlängerungen der drei Seiten liegen, oder von denen einer auf der Verlängerung einer Seite und die beiden anderen auf den beiden anderen Seiten selbst liegen, so geteilt sind, daß die Produkte je dreier nicht in ihren Endpunkten aneinander stoßenden Abschnitte der Seiten einander gleich sind, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

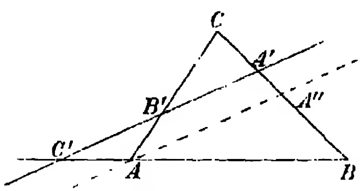

Fig. 8a.

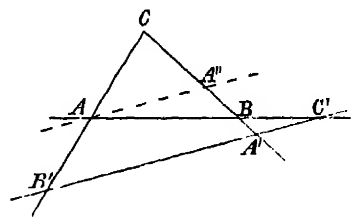

Fig. 8b.

Voraussetzung. [Fig. 8a und b.]

$$C'A . B'C . A'B = C'B . A'C . B'A.$$

Behauptung. A', B' und C' liegen auf einer Geraden.

Beweis (indirekt). C' liege auf der Verlängerung der Seite AB. Angenommen die durch A' und B' gelegte Gerade schnitte die Verlängerung von AB nicht in C', sondern in C'', so wäre nach dem Satze des Menelaos

$$C''A . B'C . A'B = C''B . A'C . B'A.$$

Nach der Vorauss. ist aber
$$C'A . B'C . A'B = C'B . A'C . B'A,$$
folglich wäre
$$C''A : C'A = C''B : C'B.$$

Dies ist aber unmöglich, da C' und C'' auf der Verlängerung von AB liegen [Planim. § 120, Anm. 2].

3. Anmerkung. Die Umkehrungen der Sätze des Ceva und des Menelaos lassen sich in einen Satz vereinigen.

4. Zusatz. Wenn drei beliebige durch die Ecken eines Dreiecks gehende Gerade einander in einem Punkte schneiden, so wird jede Seite von der zu ihr gehörigen Geraden und der durch die beiden Punkte, in welchen die beiden anderen Seiten von den zugehörigen Geraden geschnitten werden, gelegten Geraden harmonisch geteilt.

Beweis. [Fig. 7a, b, c.] Schneidet die Gerade A′B′ die Seite AB in C″, so ist nach § 18 und 19

$$\begin{array}{rcl} C'A \,.\, B'C \,.\, A'B &=& C'B \,.\, A'C \,.\, B'A \quad \text{und} \\ \underline{C''A \,.\, B'C \,.\, A'B} &=& \underline{C''B \,.\, A'C \,.\, B'A,} \\ C'A : C''A &=& C'B : C''B \qquad \text{oder} \\ C'A : C'B &=& C''A : C''B. \end{array}$$

§ 20.

Satz des Pascal. Die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnensechsecks liegen auf einer Geraden.

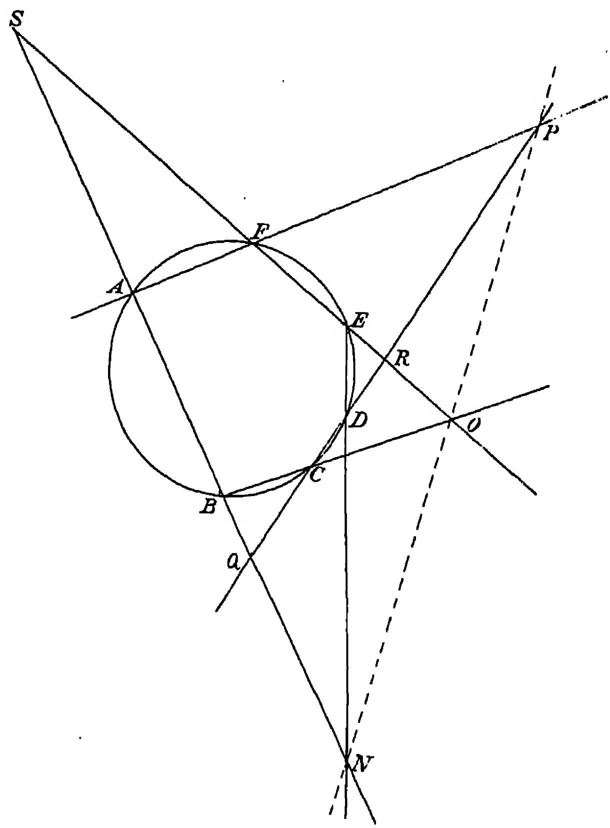

Fig. 9.

Beweis. [Fig. 9.] ABCDEF ist ein Sehnensechseck. Die einander gegenüberliegenden Seiten AB und DE schneiden einander verlängert in N, BC und EF in O, CD und FA in P. Die drei nicht anstoßenden Seiten

AB, CD und EF schneiden einander in Q, R und S und bilden das Dreieck QRS. Da dieses Dreieck von den Geraden DE, BC und FA geschnitten wird, so ist nach dem Lehrsatze des Menelaos

$$
\begin{aligned}
NQ \, . \, DR \, . \, ES &= NS \, . \, ER \, . \, DQ, \\
OS \, . \, BQ \, . \, CR &= OR \, . \, CQ \, . \, BS, \\
PR \, . \, FS \, . \, AQ &= PQ \, . \, AS \, . \, FR,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & NQ \, . \, DR \, . \, ES \, . \, OS \, . \, BQ \, . \, CR \, . \, PR \, . \, FS \, . \, AQ \\
= \, & NS \, . \, ER \, . \, DQ \, . \, OR \, . \, CQ \, . \, BS \, . \, PQ \, . \, AS \, . \, FR.
\end{aligned}
$$

Ferner ist nach Planimetrie § 138, Lehrs. 2

$$
\begin{aligned}
DR \, . \, CR &= ER \, . \, FR, \\
ES \, . \, FS &= BS \, . \, AS, \\
BQ \, . \, AQ &= CQ \, . \, DQ,
\end{aligned}
$$

$$(2) \qquad DR \, . \, CR \, . \, ES \, . \, FS \, . \, BQ \, . \, AQ = ER \, . \, FR \, . \, BS \, . \, AS \, . \, CQ \, . \, DQ.$$

Dividiert man (1) durch (2), so ergiebt sich

$$NQ \, . \, OS \, . \, PR = NS \, . \, OR \, . \, PQ.$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Satzes des Menelaos, daß N, O und P in einer geraden Linie liegen.

§ 21.

Übungen.

1. Im Dreieck ABC sind von den Ecken nach den gegenüberliegenden Seiten die drei einander in einem Punkte schneidenden Geraden AA′, BB′ und CC′ gezogen, und es ist A′C : A′B = m : n und B′C : B′A = o : p; es soll das Verhältnis C′A : C′B berechnet werden. a) m : n = 1 : 2; o : p = 3 : 4. b) m : n = 2 : 1; o : p = 4 : 3. c) m : n = 2 : 1; o : p = 3 : 4.

2. In jedem Dreiecke schneiden einander in einem Punkte a) die drei Seitenhalbierenden. b) die drei Höhen [$H_bC : H_aC = a : b$, da $\triangle BCH_b \backsim ACH_a$; ferner ist $H_cA : H_bA = b : c$ und $H_aB : H_cB = c : a$.]. c) die Mittelsenkrechten auf den drei Seiten [Folgt aus dem Dreieck, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind.]. d) die drei Winkelhalbierenden [Planim. § 121]. e) die Halbierungsgeraden zweier Außenwinkel und die Halbierungsgerade des Dreieckswinkels an der dritten Ecke. f) die durch je eine Ecke und den Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises mit der gegenüberliegenden Seite gelegten Geraden [Planim. § 101, 222]. g) die durch je eine Ecke und den Berührungspunkt des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises mit dieser Seite gelegten Geraden, also nach § 4, 1 die Geraden CC_c, AA_a, BB_b. h) die durch je eine Ecke und den Berührungspunkt des einer der drei Seiten anbeschriebenen Kreises mit der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite gelegten Geraden, also nach § 4, 1 z. B. die Geraden CC_c, AA_c, BB_c.

3. Die in einem Dreieck durch einen beliebigen Punkt einer Seitenhalbierenden und durch je einen der beiden Endpunkte der zugehörigen Seite gelegten Geraden teilen die beiden anderen Seiten in gleichen Verhältnissen.

4. Verbindet man zwei Eckpunkte eines Dreiecks mit den beiden Punkten, in welchen die beiden diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten durch eine zur dritten Seite gezogene Parallele geschnitten werden, so halbiert die durch den Schnittpunkt dieser beiden Verbindungsstrecken und die dritte Ecke gelegte Gerade die dritte Seite.

5. Verbindet man einen beliebigen Punkt P mit den Ecken eines Dreiecks ABC, und schneiden die Halbierungsgeraden der drei Winkel APB, BPC und CPA die Seiten AB, BC und CA bez. in den Punkten C', A' und B', so schneiden die Geraden CC', AA' und BB' einander in einem Punkte.

---

6. Die beiden Seiten BC und AC des Dreiecks ABC werden in den Punkten A' und B' so geteilt, daß $A'C : A'B = m : n$ und $B'C : B'A = o : p$. In welchem Verhältnisse teilt die Gerade $A'B'$ die Seite AB? a) $m : n = 1 : 2$; $o : p = 3 : 4$. b) $m : n = 2 : 1$; $o : p = 4 : 3$. c) $m : n = 2 : 1$; $o : p = 3 : 4$.

7. In jedem Dreiecke liegen auf einer geraden Linie a) die Durchschnittspunkte der Halbierungsgeraden zweier Dreieckswinkel und der Halbierungsgeraden des Außenwinkels an der dritten Ecke mit den gegenüberliegenden Seiten. b) die Durchschnittspunkte der Halbierungsgeraden der drei Außenwinkel mit den gegenüberliegenden Seiten. c) die Punkte, in welchen die durch die Berührungspunkte des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises mit je zwei Seiten gelegten Geraden die dritte Seite schneiden.

8. Die drei Fußpunkte F_c, F_a und F_b der von einem beliebigen Punkte P des einem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises auf die Seiten AB, BC und CA gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden (Simsonsche Gerade). [Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke F_cAP und F_aCP folgt $F_cA : F_cP = F_aC : F_aP$; ebenso ergiebt sich $F_bC : F_bP = F_cB : F_cP$ und $F_aB : F_aP = F_bA : F_bP$ u. s. w.]

9. Die vier Fußpunkte der vom Fußpunkte (H_c) einer Höhe eines Dreiecks auf die beiden anderen Höhen und die zugehörigen Seiten gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden. [Man zeigt mit Hilfe von Übung 8, daß zunächst drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen; man legt hierzu durch A, H_c, H, H_b den Kreis.]

10. Wenn man die Endpunkte dreier parallelen Strecken A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 paarweise mit einander verbindet, und zwar so, daß der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden entweder bei keinem oder nur bei zwei der drei Streckenpaare zwischen den beiden Strecken liegt, so liegen die drei Durchschnittspunkte P_{12}, P_{13} und P_{23} je zweier Verbindungsgeraden auf einer geraden Linie.

11. Befindet sich jedes von drei ähnlichen Dreiecken (Vielecken) in ähnlicher Lage (Planim. § 136, Aufg. 4, Anm.) mit jedem der beiden anderen Dreiecke (Vielecke), so liegen die drei Ähnlichkeitspunkte auf einer Geraden, der s. g. Ähnlichkeitsaxe der drei Dreiecke (Vielecke), gleichviel ob die Ähnlichkeitspunkte drei äußere oder ein äußerer und zwei innere sind.

12. Schneiden die durch die Ecken A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 zweier Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gelegten Geraden einander in einem Punkte P, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier entsprechenden Seiten

auf einer Geraden. [Die Seiten des $\triangle PA_1B_1$ werden durch die Gerade A_2B_2 geschnitten, die des $\triangle PB_1C_1$ durch B_2C_2, die des $\triangle PA_1C_1$ durch A_2C_2.]

13. Schneidet man die Seiten eines Vierecks durch zwei Parallelen zu einer Diagonale, so bestimmen die vier Schnittpunkte ein Viereck, dessen nicht parallele Seiten einander in einem Punkte der anderen Diagonale schneiden.

---

14. Der Durchschnittspunkt einer beliebigen Seite eines Sehnenfünfecks mit der Tangente durch die dieser Seite gegenüberliegende Ecke und die Durchschnittspunkte der beiden anderen Paare von gegenüberliegenden Seiten liegen auf einer Geraden. [Man läßt eine Seite des Sehnensechsecks durch Zusammenfallen ihrer Endpunkte unendlich klein und damit das Sehnensechseck zu einem Sehnenfünfeck werden, dann wird die Richtung der unendlich kleinen Seite durch die Tangente in dem Punkte angegeben, in welchen die beiden Endpunkte zusammengefallen sind.]

15. Wenn man durch die Ecken eines Sehnenvierecks die Tangenten legt, so liegen die vier Schnittpunkte je zweier einander gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks und des entstandenen Tangentenvierecks auf einer Geraden. [Man denkt sich an Stelle zweier einander gegenüberliegenden Ecken eines Sehnenvierecks je eine unendlich kleine Sehne gezogen.]

16. Wenn man durch die Ecken eines Dreiecks an den umbeschriebenen Kreis die Tangenten legt, so liegen die Durchschnittspunkte der Tangenten mit den gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.

17. An einen Kreis in einem festen Punkte die Tangente zu legen nur mit Hilfe des Lineals. [Übung 14.]

18. Wenn in einem Sehnensechseck zwei Paare einander gegenüberliegender Seiten parallel sind, so ist es auch das dritte Paar.

2. Harmonische Punkte und Strahlen.

§ 22.

1. Erklärung. [Fig. 10a.] Wenn eine Strecke A_1A_2 durch zwei Punkte B_1 und B_2 innen bez. außen in demselben Verhältnisse $(m : n)$ geteilt ist [Planim. § 120], so daß $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2$ $(= m : n)$, so heißt die Strecke A_1A_2 in den beiden Punkten B_1 und B_2 (im Verhältnisse $m : n$) harmonisch geteilt.

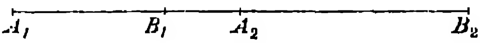

Fig. 10a.

2. Aufgabe 1. Eine feste Strecke A_1A_2 im Verhältnisse zweier gegebenen a) Strecken, b) Zahlen harmonisch zu teilen.

Auflösung. Siehe Planim. § 120, 3 und Anm. 3.

3. Aufgabe 2. Eine feste Strecke A_1A_2 harmonisch zu teilen, wenn der eine Teilpunkt [a) der innere, b) der äußere] gegeben ist.

Auflösung 1. Man zieht durch die beiden Endpunkte der Strecke A_1A_2 zwei Parallelen, trägt auf der einen Parallele eine beliebige Strecke nach beiden Seiten hin ab, legt durch den freien Endpunkt der einen abgetragenen Strecke und durch den gegebenen Teilpunkt die Gerade und ebenfalls durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit der anderen Parallele und durch den freien Endpunkt der anderen abgetragenen Strecke die Gerade; diese Gerade schneidet die feste Strecke A_1A_2 oder die Verlängerung derselben in dem gesuchten Teilpunkte.

Auflösung 2. Geschieht mit Hilfe von § 19, 4. (Ohne Zirkel.)

4. Folgerungen. a) Es giebt nur ein Punktepaar B_1 und B_2, welche eine feste Strecke A_1A_2 in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ harmonisch teilen, so daß $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2$. [Planim. § 120, Anm. 2.]

b) Da das Verhältnis $m:n$ beliebig gewählt werden kann, so giebt es unendlich viele Punktepaare B_1 und B_2, welche eine feste Strecke A_1A_2 harmonisch teilen.

c) Liegt der innere Teilpunkt B_1 der harmonisch geteilten Strecke A_1A_2 näher an A_2 [A_1], so liegt der äußere Teilpunkt B_2 auf der Verlängerung von A_1A_2 über A_2 [A_1] hinaus.

Nähert sich B_1 dem Punkte A_2 [A_1], so nähert sich auch B_2 dem Punkte A_2 [A_1].

Fällt B_1 mit A_2 [A_1] zusammen, so fällt auch B_2 mit A_2 [A_1] zusammen.

Entfernt sich B_1 von A_2 [A_1], so entfernt sich auch B_2 von A_2 [A_1], und fällt B_1 in den Halbierungspunkt von A_1A_2, so rückt B_2 auf der Verlängerung von A_1A_2 über A_2 [A_1] hinaus in unendliche Entfernung.

5. Lehrsatz. Ist die Strecke A_1A_2 in B_1 und B_2 harmonisch geteilt, so ist auch die Strecke B_1B_2 in A_1 und A_2 harmonisch geteilt.

Beweis. Aus $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2$ folgt durch Umstellung der inneren Glieder $B_1A_1 : B_2A_1 = B_1A_2 : B_2A_2$
oder $A_1B_1 : A_1B_2 = A_2B_1 : A_2B_2$.

6. Erklärung. Ist die Strecke A_1A_2 in den Punkten B_1 und B_2 harmonisch geteilt, so nennt man die vier Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 harmonische Punkte; A_1 und A_2 heißen zugeordnete (konjugierte) harmonische Punkte, ebenso B_1 und B_2.

7. Aufgabe. Die Abschnitte einer in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ harmonisch geteilten Strecke zu berechnen.

Auflösung. [Fig. 10a.] Es sei $A_1A_2 = a$ und

$$B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2 = m:n, \text{ wo } m > n.$$

Aus $B_1A_1 : B_1A_2 = m : n$ folgt $B_1A_1 = mx$ und $B_1A_2 = nx$.

Da ferner $B_1A_1 + B_1A_2 = a$, so ist

$$mx + nx = a,$$

$$x = \frac{a}{m+n}.$$

Folglich ist $B_1A_1 = \frac{m}{m+n}a$ und $B_1A_2 = \frac{n}{m+n}a$.

Aus $B_2A_1 : B_2A_2 = m : n$ folgt $B_2A_1 = my$ und $B_2A_2 = ny$.

Da ferner $B_2A_1 - B_2A_2 = a$, so ist

$$my - ny = a,$$

$$y = \frac{a}{m-n}.$$

Folglich ist $B_2A_1 = \frac{m}{m-n}a$ und $B_2A_2 = \frac{n}{m-n}a$.

Ferner ergiebt sich, daß

$$A_1B_1 : A_1B_2 = \left(\frac{m}{m+n}a\right) : \left(\frac{m}{m-n}a\right) = (m-n) : (m+n).$$

Ist daher $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2 = m : n$,

so ist $A_1B_1 : A_1B_2 = A_2B_1 : A_2B_2 = (m-n) : (m+n)$.

§ 23.

1. Erklärung 1. Vier Größen bilden eine harmonische Proportion, wenn die Differenz der beiden ersten zur Differenz der beiden letzten sich verhält wie die erste zur letzten.

Die vier Größen a, b, c, d bilden daher eine harmonische Proportion, wenn

$$(a-b) : (c-d) = a : d.$$

2. Erklärung 2. Sind die beiden mittleren von vier Größen, die eine harmonische Proportion bilden, einander gleich, so entsteht eine stetige harmonische Proportion.

Ist z. B. in der vorhergehenden Proportion $c = b$, dann ist

$$(a-b) : (b-d) = a : d.$$

b heißt dann die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel zu a und d.

3. Ist b das harmonische Mittel zwischen a und c, so ist

$$(a-b) : (b-c) = a : c.$$

Hieraus folgt
$$ac - bc = ab - ac,$$
$$2ac = (a + c)\,b,$$
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right);$$
d. h. der reziproke Wert des harmonischen Mittels zweier Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel der reziproken Werte der beiden Zahlen, und umgekehrt.

4. Wird die Länge einer gespannten Saite gleich 1 gesetzt, so ist, bei gleichem Stoff und gleicher Spannung und Dicke, die Saitenlänge der Quinte des vorhergehenden Tones gleich $\frac{2}{3}$. Da nun
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2}{3}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{5}{4} = \frac{1}{\frac{4}{5}}$$
ist, so ist $\frac{4}{5}$ das harmonische Mittel zu 1 und $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$ ist aber die Saitenlänge der großen Terz des ersten Tones. Drei Saiten von den Längen 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ erzeugen also den harmonischen Dreiklang: Grundton, große Terz, Quinte. Daher der Name (stetige) harmonische Proportion.

5. Trägt man auf einer Geraden von einem Punkte A_1 aus nach derselben Richtung drei Strecken $A_1B_1 = a$, $A_1A_2 = b$ und $A_1B_2 = c$ ab, und teilen die freien Endpunkte B_1 und B_2 der kleinsten und größten Strecke die mittlere Strecke A_1A_2 harmonisch, dann ist

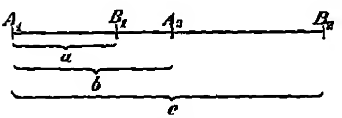

Fig. 10b.

$$B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2,$$
$$a : (b - a) = c : (c - b),$$
$$ac - ab = bc - ac,$$
$$2ac = (a + c)\,b,$$
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right),$$
d. h. die mittlere Strecke A_1A_2 ist das harmonische Mittel zwischen den beiden anderen Strecken B_1A_1 und B_2A_1. Daher der Name harmonische Teilung.

§ 24.

1. **Erklärung.** Vier Gerade, welche durch einen beliebigen Punkt nach vier harmonischen Punkten gezogen sind, heißen vier **harmonische Strahlen (Harmonikalen)** oder ein **harmonisches Strahlenbüschel.** Der gemeinschaftliche Punkt der Strahlen eines harmonischen Strahlenbüschels heißt der **Scheitel** oder **Mittelpunkt** des Büschels. Je zwei Strahlen, welche durch zwei einander zugeordnete Punkte gehen, heißen **zugeordnete Strahlen.**

2. **Folgerung 1.** Zwei einander schneidende Gerade und die Halbierungsgeraden der von ihnen gebildeten Winkel bilden ein harmonisches Strahlenbüschel. [Planim. § 121, Zus.]

3. **Folgerung 2.** Vier durch einen Punkt gehende Gerade bilden ein harmonisches Strahlenbüschel, wenn das von zwei dieser Geraden abgeschnittene Stück einer beliebigen geraden Linie durch den einen der beiden anderen Strahlen halbiert wird und der vierte Strahl der geraden Linie parallel ist.

Der Beweis ergiebt sich aus § 22, 4, c, da der dem Halbierungspunkte einer Strecke zugeordnete Punkt der unendlich ferne Punkt auf der Verlängerung der Strecke ist.

§ 25.

1. **Lehrsatz.** Wenn man zu einem Strahle eines harmonischen Strahlenbüschels eine beliebige Parallele zieht, so wird durch den zugeordneten Strahl das von den beiden anderen zugeordneten Strahlen abgeschnittene Stück der Parallelen halbiert.

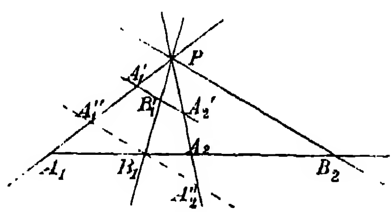

Fig. 11a.

1. Voraussetzung. [Fig. 11a.] A_1, A_2, B_1 und B_2 sind vier harmonische Punkte, also PA_1, PA_2, PB_1 und PB_2 vier harmonische Strahlen.

$$A_1'A_2' \parallel PB_2.$$

Behauptung. $B_1'A_1' = B_1'A_2'$.

Beweis. Zieht man zu PB_2 durch den dem Punkte B_2 zugeordneten Punkt B_1 die Parallele $A_1''A_2''$, so ist nach Planimetrie § 116, 1 und 2

$$B_1A_1'' : PB_2 = B_1A_1 : B_2A_1$$

und $B_1A_2'' : PB_2 = B_1A_2 : B_2A_2$, ferner ist nach Vor. und § 22, 5

$$B_1A_1 : B_2A_1 = B_1A_2 : B_2A_2,$$

$$B_1A_1'' : PB_2 = B_1A_2'' : PB_2,$$

$$B_1A_1'' = B_1A_2'',$$

$B_1'A_1' = B_1'A_2'$ nach Planimetrie § 119.

2. Voraussetzung. [Fig. 11b.] A_1, A_2, B_1 und B_2 sind vier harmonische Punkte, also PA_1, PA_2, PB_1 und PB_2 vier harmonische Strahlen.

$$B_1'B_2' \parallel PA_2.$$

Behauptung. $A_1'B_1' = A_1'B_2'$.

Beweis. Zieht man zu PA_2 durch den dem Punkte A_2 zugeordneten Punkt A_1 die Parallele $B_1''B_2''$, so ist

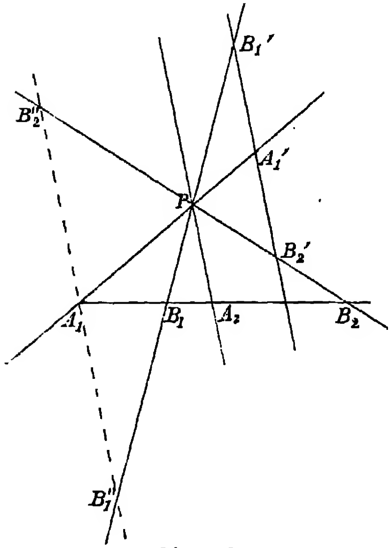

Fig. 11b.

$$A_1B_1'' : PA_2 = B_1A_1 : B_1A_2$$

und $A_1B_2'' : PA_2 = B_2A_1 : B_2A_2$,

ferner ist nach Vor.

$$B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2,$$

$$A_1B_1'' : PA_2 = A_1B_2'' : PA_2,$$

$$A_1B_1'' = A_1B_2'',$$

$$A_1'B_1' = A_1'B_2'.$$

2. **Zusatz 1.** Jede zu einem Strahle eines harmonischen Strahlenbüschels gezogene Parallele wird durch die Strahlen des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten. Denn der dem Halbierungspunkte einer Strecke zugeordnete harmonische Punkt ist der unendlich entfernte Punkt auf der Verlängerung der Strecke.

3. **Zusatz 2.** Wenn das von zwei zugeordneten Strahlen eines harmonischen Büschels abgeschnittene Stück einer Geraden von einem der beiden anderen Strahlen halbiert wird, so ist die Gerade dem vierten Strahle parallel.

§ 26.

1. **Lehrsatz.** Jede durch ein harmonisches Strahlenbüschel gelegte Gerade wird durch die Strahlen des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten.

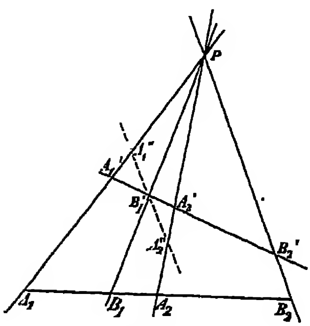

Fig. 12a.

Voraussetzung. [Fig. 12a und b.] A_1, A_2, B_1 und B_2 sind vier harmonische Punkte, also bilden PA_1, PA_2, PB_1 und PB_2 ein harmonisches Strahlenbüschel.

Behauptung.

$$B_1'A_1' : B_1'A_2 = B_2'A_1' : B_2'A_2'.$$

Beweis. Zieht man durch einen beliebigen der vier Punkte, in welchen die vier harmonischen Strahlen von der Geraden geschnitten werden, z. B. B_1', zu dem dem Strahle PB_1 zugeordneten Strahle PB_2 die Parallele $A_1''A_2''$, so ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$B_1'A_1'' = B_1'A_2'',$$

ferner ist

$$B_1'A_1' : B_2'A_1' = B_1'A_1'' : PB_2'$$

und

$$B_1'A_2' : B_2'A_2' = B_1'A_2'' : PB_2',$$

$$B_1'A_1' : B_2'A_1' = B_1'A_2' : B_2'A_2'$$

oder

$$B_1'A_1' : B_1'A_2' = B_2'A_1' : B_2'A_2'.$$

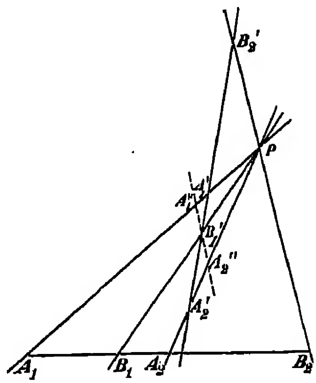

Fig. 12b.

2. Zusatz. Zu jedem von drei festen Strahlen giebt es nur einen zugeordneten harmonischen Strahl.

§ 27.

Lehrsätze. (Umkehrungen von § 24, Folg. 1.)

1. **Wenn der Winkel zweier zugeordneten Strahlen eines harmonischen Strahlenbüschels von dem einen der beiden anderen Strahlen halbiert wird, so steht sein zugeordneter Strahl auf ihm senkrecht.**

Voraussetzung. [Fig. 13.]
$B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2$ und $\angle B_1PA_1 = B_1PA_2$.

Behauptung. $PB_2 \perp PB_1$.

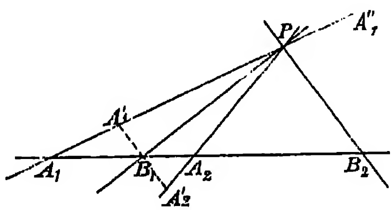

Fig. 13.

Beweis. Die auf PB_1 in P errichtete Senkrechte halbiert $\angle A_2PA_1''$, ist also nach § 24, Folg. 1, der PB_1 zugeordnete Strahl. Da es auf PB_1 in P nur eine Senkrechte, und nach § 26, Zus., zu PB_1 nur einen zugeordneten Strahl PB_2 giebt, so muß PB_2 auf PB_1 senkrecht stehen.

2. Wenn zwei zugeordnete Strahlen eines harmonischen Strahlenbüschels auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel der beiden anderen zugeordneten Strahlen.

Voraussetzung. [Fig. 13.] $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2$ und $PB_2 \perp PB_1$.

Behauptung. $\angle B_1PA_1 = B_1PA_2$ und $\angle B_2PA_2 = B_2PA_1''$.

Beweis. Wird $\angle A_1PA_2$ durch PB_1 halbiert, und verbindet man P mit dem dem Punkte B_1 zugeordneten Punkte B_2, so steht PB_2 auf PB_1 senkrecht, und PB_2 halbiert $\angle A_2PA_1''$. Nähert sich B_1 dem Punkte A_2, so nähert sich auch nach § 22, 4, c der zugeordnete Punkt B_2 dem Punkte A_2 und $\angle B_1PB_2$ ist < 1 R; entfernt sich B_1 aus der Anfangslage von A_2, so entfernt sich auch B_2 von A_2 und $\angle B_1PB_2$ ist > 1 R; also nur in einer bestimmten Lage des Punktes B_1 stehen die zugeordneten Strahlen PB_1 und PB_2 auf einander senkrecht. In dieser Lage halbieren PB_1 und PB_2 die von PA_1 und PA_2 gebildeten Winkel.

Bemerkung. Die beiden Sätze kann man auch beweisen mit Hilfe der beiden kongruenten Dreiecke PB_1A_1' und PB_1A_2', die man erhält, wenn man durch B_1 zu PB_2 die Parallele $A_1'A_2'$ zieht.

§ 28.

1. Zusatz. Beschreibt man über dem Abstande zweier zugeordneten harmonischen Punkte als Durchmesser den Kreis, so stehen die Abstände jedes Punktes dieses Kreises von den beiden anderen zugeordneten Punkten in demselben Verhältnisse, in welchem der Abstand der beiden letzten zugeordneten Punkte durch die beiden ersten zugeordneten Punkte geteilt wird.

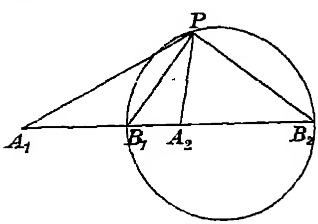

Fig. 14.

Voraussetzung. [Fig. 14.] $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2 = m : n$. P ein beliebiger Punkt des Kreises über B_1B_2 als Durchmesser.

Behauptung. $PA_1 : PA_2 = m : n$.

Beweis. Folgt aus § 27, 2 und Planim. § 121, Zus.

2. Der **geometrische Ort** aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist der Kreis, dessen Durchmesser der Abstand derjenigen beiden Punkte ist, in welchen der Abstand der festen Punkte im gegebenen Verhältnisse harmonisch geteilt wird. **(Apollonischer Kreis.)**

Beweis. P' sei ein Punkt, dessen Abstände von den beiden festen Punkten A_1 und A_2 im gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen. Teilt man die Strecke A_1A_2 im Verhältnisse $m : n$ in den Punkten B_1 und B_2 harmonisch, so daß $B_1A_1 : B_1A_2 = B_2A_1 : B_2A_2 = m : n$, und verbindet P' mit A_1, A_2, B_1 und B_2, so wird der Winkel $A_1P'A_2$ und sein Nebenwinkel durch $P'B_1$ und $P'B_2$ halbiert [Planim. § 121, Anm.]. Folglich ist $\angle B_1P'B_2 = 1R$; P' liegt also auf dem Kreise über B_1B_2 als Durchmesser. Dasselbe gilt von allen Punkten, deren Abstände von A_1 und A_2 im Verhältnisse $m : n$ stehen.

Umgekehrt stehen nach dem vorhergehenden Zusatze die Abstände jedes Punktes des Kreises über B_1B_2 als Durchmesser von A_1 und A_2 im Verhältnisse $m : n$.

§ 29.

1. Erklärung. Vier Gerade, von welchen keine drei durch denselben Punkt gehen, und welche einander in sechs Punkten schneiden, bilden ein vollständiges Vierseit. [Fig. 15.] Dasselbe hat sechs Ecken, A, B, C, D, E, F, und drei Diagonalen, AC, BD, EF.

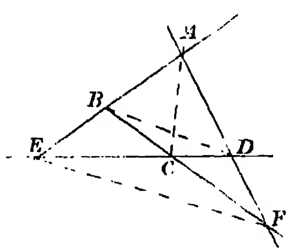

Fig. 15.

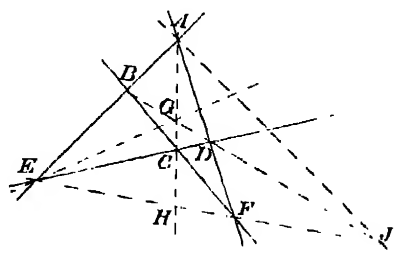

Fig. 16.

2. Lehrsatz. In einem vollständigen Vierseit teilen die Diagonalen einander harmonisch.

Behauptung. [Fig. 16.] 1) E, F, H, J, 2) B, D, G, J, 3) A, C, G, H sind harmonische Punkte.

Beweis. Daß E, F, H, J harmonische Punkte sind, ergiebt sich aus § 19, Zus., denn in dem Dreieck AEF schneiden die durch die Ecken gehenden Geraden AH, ED, FB einander in einem Punkte C.

Um zu beweisen, daß B, D, G, J harmonische Punkte sind, zieht man die Gerade AJ; dann sind AE, AF, AH, AJ vier harmonische Strahlen, welche die Gerade BJ in den Punkten B, D, G, J schneiden. [§ 26, 1.]

Zieht man noch die Gerade EG, dann sind EB, ED, EG, EJ vier harmonische Strahlen, welche die Gerade AH in den Punkten A, C, G, H schneiden.

§ 30.

Übungen.

1. Eine Strecke A_1A_2 ist k cm lang; auf derselben liegt ein Punkt B_1 so, daß $A_1B_1 = l$ cm ist. Der zu B_1 harmonisch zugeordnete Punkt B_2 soll gefunden werden durch Konstruktion und durch Rechnung. a) $k = 18$; $l = 15$. b) $k = 18$; $l = 6$. c) $k = 18$; $l = 9$.

2. Eine Strecke A_1A_2 ist 18 cm lang und in zwei Punkten B_1 und B_2 im Verhältnisse 5 : 1 harmonisch geteilt. In welchem Verhältnisse ist die Strecke B_1B_2 in den Punkten A_1 und A_2 harmonisch geteilt?

3. Auf der Strecke AC ist ein Punkt B angenommen, so daß AB = 20 mm und BC = 10 mm. Zu den drei Punkten A, B und C den vierten harmonischen Punkt durch Rechnung zu finden, und zwar sei derselbe zugeordnet a) dem Punkte B. b) dem Punkte A. c) dem Punkte C.

4. Das harmonische Mittel zu finden zu a) 1 und $\frac{1}{2}$. b) 1 und $\frac{1}{3}$. c) 1 und $\frac{3}{5}$. d) 1 und $\frac{1}{5}$. e) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$.

5a. Wenn $(a - b) : (b - c) = a : c$, so ist $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$.

5b. Wenn $a - b = b - c$, so ist $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a} : \frac{1}{c}$.

In Worten?

6. Die reziproken Werte der Glieder einer arithmetischen Progression bilden eine harmonische Progression, d. h. eine Progression, in der je drei aufeinander folgende Glieder eine stetige harmonische Proportion bilden. So folgt z. B. aus der arithmetischen Progression 1, 2, 3, 4, . . . die harmonische Progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

7. Bilden die Seiten eines Dreiecks eine stetige arithmetische Proportion, so bilden die zugehörigen Höhen eine stetige harmonische Proportion und umgekehrt.

8. Das arithmetische Mittel $\left[\frac{a + b}{2}\right]$ zweier Zahlen a und b ist größer als das geometrische $[\sqrt{ab}]$ und dieses wieder größer als das harmonische $\left[\frac{2ab}{a + b}\right]$.

9. Die Hälfte einer harmonisch geteilten Strecke ist das geometrische Mittel der Abstände der Teilpunkte vom Halbierungspunkte der Strecke. [Ist A_1A_2 in C halbiert und in B_1 und B_2 harmonisch geteilt, und setzt man $A_1A_2 = a$, $B_1C = b_1$ und $B_2C = b_2$,

so ist $\left(\frac{a}{2} + b_1\right) : \left(\frac{a}{2} - b_1\right) = \left(b_2 + \frac{a}{2}\right) : \left(b_2 - \frac{a}{2}\right)$, woraus $b_1b_2 = \frac{a^2}{4}$.]

10. Ist die Strecke A_1A_2 in den Punkten B_1 und B_2 harmonisch geteilt, und P ein beliebiger Punkt außerhalb der Geraden AB, so ist

$$\sin B_1PA_1 : \sin B_1PA_2 = \sin B_2PA_1 : \sin B_2PA_2.$$

11. Die auf den Strahlen eines harmonischen Strahlenbüschels im Scheitel errichteten Senkrechten bilden wiederum ein harmonisches Strahlenbüschel. [Planim. § 21, 30 und 31.]

12. Die Mittelpunkte des einem Dreieck einbeschriebenen und des einer Seite desselben anbeschriebenen Kreises teilen die Winkelhalbierende des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels harmonisch, und es ist

$$CW : CW_c = W_\gamma W : W_\gamma W_c = \varrho : \varrho_c. \quad [\S\ 24, \text{Folg. } 1.]$$

13. Der Abstand der Punkte, in welchem der einem Dreieck einbeschriebene und der einer Seite desselben anbeschriebene Kreis diese Seite berühren, wird durch die zu dieser Seite gehörige Höhe und Winkelhalbierende harmonisch geteilt.

14. Der Abstand des Fußpunktes der zu einer Seite eines Dreiecks gehörigen Höhe und des Punktes, in welchem der durch die gegenüberliegende Ecke gehende Durchmesser des umbeschriebenen Kreises diese Seite schneidet, wird durch die Winkelhalbierende des Winkels an dieser Ecke und seines Außenwinkels harmonisch geteilt. [Planim. § 101, 226.]

15. Der Schenkel eines gleichschenkligen Trapezes wird durch die vom Schnittpunkte der Halbierungsgeraden der beiden anliegenden Winkel auf diesen Schenkel und die Grundseiten gefällten Senkrechten harmonisch geteilt.

16a. Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes eines Kreises mit den Endpunkten einer beliebigen Sehne teilen den auf der Sehne senkrecht stehenden Durchmesser harmonisch.

16b. Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes eines Kreises mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers teilen jede auf dem Durchmesser senkrecht stehende Sehne harmonisch.

---

17. Einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsgeraden mit drei festen auf einer Geraden liegenden Punkten zwei gleiche Winkel bilden. [§ 28.]

18. Einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den drei Ecken eines gegebenen Dreiecks in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

19. $a : b$ (oder $h_b : h_a$ oder $u : v$), c und a) h_c. b) s_c. c) w_γ. d) p. e) $\angle(cs_c)$. 20. $a : b$ ($h_b : h_a$, $u : v$), p, q.

21. u, v und a) h_c. b) s_c. c) w_γ. d) p. e) $\angle(cs_c)$.

22. $a : b$ ($h_b : h_a$), $u - v$ und a) h_c. b) s_c. c) w_γ. d) q. e) $\angle(cs_c)$.

23. $a : b$ ($h_b : h_a$, $u : v$), $p - q$ und a) h_c. b) $\alpha - \beta$.

24. c, $s_a : s_b$ und a) h_c. b) s_c. c) $\angle(cs_a)$. d) $\angle(cs_c)$. e) γ. f) r. g) $a : b$. h) $h_a : h_b$. i) $u : v$.

25. $a : b$ ($h_b : h_a$), c und a) s_a. b) $\angle(s_as_b)$. c) $\angle(as_a)$.

26. u, v und a) s_a. b) $\angle(s_as_b)$. c) $\angle(as_a)$. d) $a : s_a$.

27. $a : b$ ($h_a : h_b$, $u : v$), s_a, $\angle(as_c)$. 28. a, b, $s_a : s_b$.

29. c, $b : s_b$ und a) s_c. b) s_a. c) $\angle(s_as_b)$.

30. $a : b$ ($h_b : h_a$, $u : v$), s_c, h_c.

31. Der Abstand des Schnittpunktes der drei a) Seitenhalbierenden, b) Winkelhalbierenden, c) Höhen eines Dreiecks von einer Ecke wird durch die dieser Ecke gegenüberliegende Seite und die Verbindungsgerade der Endpunkte der zu den beiden anderen Seiten gehörigen a) Seitenhalbierenden, b) Winkelhalbierenden, c) Höhen harmonisch geteilt. [§ 29, 2.]

32. Jede Seite eines Dreiecks wird harmonisch geteilt durch die zugehörige a) Seitenhalbierende, b) Winkelhalbierende, c) Höhe und die Verbindungsgerade der Endpunkte der zu den beiden anderen Seiten gehörigen a) Seitenhalbierenden. b) Winkelhalbierenden. c) Höhen.

33. Verbindet man zwei Eckpunkte eines Dreiecks mit den beiden Punkten, in welchen die beiden diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten durch eine zur dritten Seite gezogene Parallele geschnitten werden, so wird der Abstand des Schnittpunktes dieser beiden Verbindungsstrecken von der dritten Ecke durch die dritte Seite und die Parallele zu ihr harmonisch geteilt.

34. Jede Seite eines Dreiecks wird durch den Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises und die Gerade, welche durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises mit den beiden anderen Seiten gelegt ist, harmonisch geteilt. [§ 21, 2f. und § 19, 4.]

35a. Zu drei festen Punkten (Strahlen) den zu einem derselben gehörigen vierten harmonischen Punkt (Strahl) bloß mit Anwendung des Lineals zu finden. [§ 19, 4 oder mit Hilfe des vollst. Vierseits.]

35b. Ein fester Winkel ist halbiert. Auf der Halbierungsgeraden im Scheitel des Winkels die Senkrechte bloß mit Anwendung des Lineals zu errichten.

36. In Fig. 16 werden die Strecken AB und CD durch die Geraden FE und FG harmonisch geteilt; ebenso die Strecken AD und BC durch EF und EG; ebenso EG durch FC und FA und FG durch ED und EB.

3. Pol und Polare.

§ 31.

Erklärungen. Je zwei Punkte, welche einen Durchmesser eines Kreises harmonisch teilen, heißen zugeordnete (konjugierte) Pole des Kreises.

Die in dem einen von zwei zugeordneten Polen auf dem zugehörigen Durchmesser oder seiner Verlängerung errichtete Senkrechte heißt die Polare des anderen Poles.

Folgerungen. Zu jeder Geraden giebt es in Bezug auf einen festen Kreis immer einen und nur einen Pol und ebenso zu jedem Punkte immer eine und nur eine Polare. Liegt die Polare außerhalb des Kreises, so liegt der Pol innerhalb, schneidet die Polare den Kreis, so liegt der Pol außerhalb. Die Polare des Mittelpunktes des Kreises ist unendlich entfernt, die eines unendlich entfernten Punktes ist ein Durchmesser; der Pol eines Durchmessers liegt in unendlicher Entfernung, der einer unendlich entfernten

Geraden ist der Mittelpunkt. Die Polare eines Punktes des Kreises ist die Tangente in diesem Punkte, der Pol einer Tangente ist der Berührungspunkt.

§ 32.

Lehrsatz. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten ist die Polare dieses Punktes.

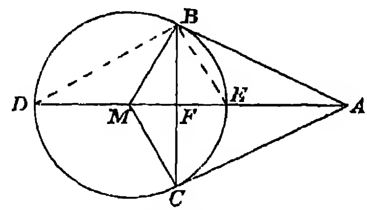

Fig. 17.

Voraussetzung. [Fig. 17.]
$BA \perp MB$; $CA \perp MC$.

Behauptung. $BC \perp AD$ und
$FD : FE = AD : AE$.

Beweis. Es ist 1. $BC \perp AD$ nach Planim. § 92.

Verbindet man B mit D und E, so ist

2. $\angle DBE = 1R$ und

$\angle EBA = EDB = EBF$, folglich nach § 24, Folg. 1,

$FD : FE = AD : AE$.

Zusatz 1. Legt man durch die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise an diesen die Tangenten, so ist der Schnittpunkt der Tangenten der zur Geraden gehörige Pol.

Zusatz 2. Die Verbindungsgeraden eines Punktes außerhalb eines Kreises mit den Schnittpunkten seiner Polare und des Kreises sind Tangenten.

§ 33.

Lehrsatz. Der Halbmesser eines Kreises ist das geometrische Mittel zwischen den Abständen zweier zugeordneten Pole vom Mittelpunkte.

Beweis. [Fig. 17.] Zieht man von einem beliebigen Punkte A an den Kreis M die beiden Tangenten AB und AC, so ist die Gerade BC die zu A gehörige Polare nach § 32, Lehrs.; BC geht also durch den zu A gehörigen Pol F und steht auf dem Durchmesser DE senkrecht. Aus Planim. § 105 oder § 135 folgt dann, daß

$$MB^2 = FM \, . \, AM.$$

Anmerkung. Der Satz folgt auch aus § 30, 9.

Zusatz 1. Durch zwei Polpaare auf verschiedenen Durchmessern eines Kreises läßt sich immer ein Kreis legen.

Der Beweis ergiebt sich aus dem vorhergehenden Lehrsatze und aus der leicht indirekt zu beweisenden Umkehrung von Planim. § 138, Lehrs. 2. [Trägt man auf zwei einander schneidenden Geraden je zwei Strecken vom Schnittpunkte aus nach derselben Seite hin ab, und sind die Rechtecke aus den Abschnitten jeder Geraden einander gleich, so liegen die freien Endpunkte der abgetragenen Strecken auf einem Kreise.]

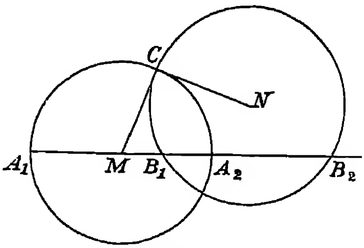

Fig. 18.

Zusatz. 2. Jeder Kreis, welcher durch zwei Pole eines festen Kreises gelegt wird, schneidet diesen rechtwinklig.

Beweis. Ist in Fig. 18 der Durchmesser A_1A_2 des Kreises (M) in B_1 und B_2 harmonisch geteilt und C der Schnittpunkt eines beliebigen durch B_1 und B_2 gelegten Kreises (N) mit dem festen Kreise (M), so ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze $MC^2 = MB_1 \cdot MB_2$; folglich ist nach der Umkehrung von Planim. § 138, Lehrs. 3, MC Tangente an den Kreis (N), folglich ist $\angle MCN = 1R$ und NC Tangente an den Kreis (M).

§ 34.

Lehrsatz. Die Polare jedes Punktes einer Geraden geht durch den Pol der Geraden.

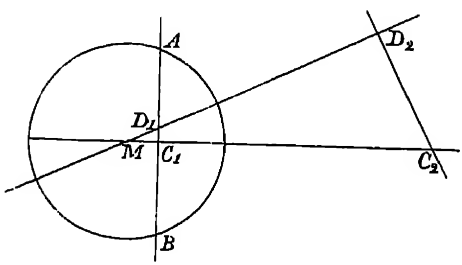

Fig. 19a.

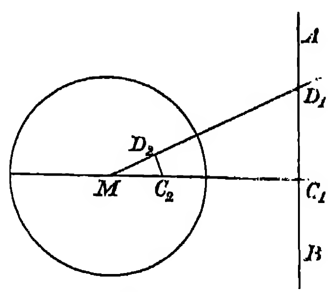

Fig. 19b.

Beweis. [Fig. 19a und b.] AB sei eine feste Gerade, C_1 der Fußpunkt der von dem Mittelpunkte M eines festen Kreises auf AB gefällten Senkrechten, C_2 der zu AB gehörige Pol. D_1 sei ein beliebiger Punkt auf AB, D_2 der dem Punkte D_1 zugeordnete Pol.

Es soll bewiesen werden, daß die Polare des Punktes D_1, d. h. die auf D_1D_2 in D_2 errichtete Senkrechte, durch C_2 geht. Dies wird der Fall

sein, wenn $\angle C_2D_2M = 1R$. Nach § 33, Zusatz 1, ist $C_1C_2D_2D_1$ ein Sehnenviereck; da ferner $\angle D_1C_1C_2 = 1R$, so ist auch $\angle D_1D_2C_2 = 1R$.

Zusatz 1. Der Pol einer Geraden ist der Durchschnittspunkt der Polaren zweier (oder mehrerer) beliebigen Punkte der Geraden.

Zusatz 2. Der Pol jeder durch einen Punkt gehenden Geraden liegt auf der Polare des Punktes.

Zusatz 3. Die Polare des Durchschnittspunktes zweier Geraden ist die Verbindungsgerade der Pole der beiden Geraden.

Anmerkung. Bewegt sich der Punkt D_1 auf AB in der Richtung von C_1 nach A, so bewegt sich D_2 auf dem Kreise über MC_2 als Durchmesser, und die Polare des Punktes D_1 dreht sich um den Pol C_2 der Geraden AB in der entgegengesetzten Richtung, wie der Zeiger einer Uhr. Und umgekehrt.
Welche Bewegung macht die Polare von D_1, wenn AB durch M geht?

§ 35.

Lehrsatz. Alle durch einen beliebigen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises gehenden Sehnen werden durch diesen Punkt und seine Polare harmonisch geteilt.

Voraussetzung. [Fig. 20a und b.] CD ist die Polare des Punktes B_1.

Behauptung. E_1, E_2, B_1, F harmonische Punkte.

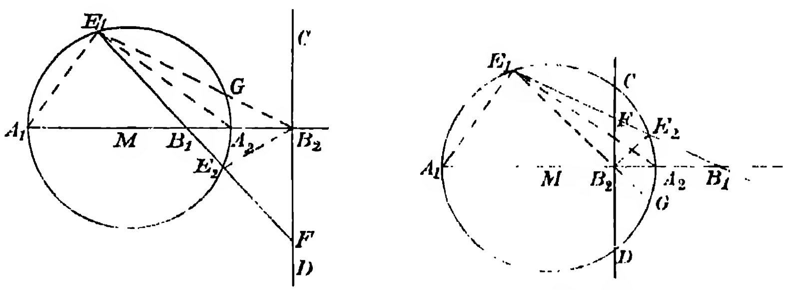

Fig. 20a. Fig. 20b.

Beweis. Da nach Voraussetzung A_1A_2 in B_1 und B_2 harmonisch geteilt ist, so sind E_1A_1, E_1A_2, E_1B_1, E_1B_2 harmonische Strahlen; da ferner $\angle A_1E_1A_2 = 1R$, so ist nach § 27, 2 $\angle A_2E_1B_1 = A_2E_1B_2$, folglich auch $\overset{\frown}{A_2E_2} = \overset{\frown}{A_2G}$ und $\angle A_2B_2E_2 = A_2B_2G$ (durch Umdrehen um A_1A_2 nachzuweisen); da schließlich $CD \perp A_1A_2$, so sind B_2E_1, B_2E_2, B_2B_1, B_2F harmonische Strahlen, also E_1, E_2, B_1, F harmonische Punkte.

Zusatz. Ist eine Sehne harmonisch geteilt, so geht die Polare jedes der beiden Teilpunkte durch den anderen Teilpunkt.

§ 36.

Aufgabe 1. Zu einem festen Punkte P in Bezug auf einen festen Kreis M die Polare zu zeichnen ohne Anwendung des Zirkels.

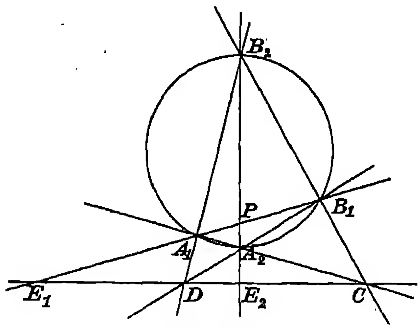

Fig. 21a.

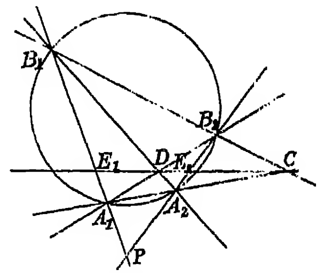

Fig. 21b.

Auflösung. [Fig. 21a und b.]

Man ziehe durch P zwei beliebige Gerade, welche den Kreis in A_1 und B_1 bez. A_2 und B_2 schneiden, bezeichne den Schnittpunkt von A_1A_2 und B_1B_2 mit C und den Schnittpunkt von A_1B_2 und A_2B_1 mit D, dann ist die Gerade CD die verlangte Polare.

Zum Beweise bezeichne man die Punkte, in welchen die Gerade CD die Geraden A_1B_1 und A_2B_2 schneidet, mit E_1 bez. E_2, dann wird in dem vollständigen Vierseit $A_1A_2B_1B_2CD$ [$CB_2DA_2B_1A_1$ in Fig. 21b] nach § 29, Lehrs., die Diagonale A_1B_1 durch die beiden anderen Diagonalen in P und E_1 und die Diagonale A_2B_2 durch die beiden anderen Diagonalen in P und E_2 harmonisch geteilt; folglich geht nach § 35, Zus., da A_1B_1 und A_2B_2 Sehnen des Kreises sind, die Polare von P sowohl durch E_1 als durch E_2, d. h. die Gerade E_1E_2 oder CD ist die Polare von P.

Aufgabe 2. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen die beiden Tangenten zu legen ohne Anwendung des Zirkels. [Aufg. 1 und § 32, Zus. 2.]

Aufgabe 3. Zu einer festen Geraden in Bezug auf einen festen Kreis den Pol zu zeichnen ohne Anwendung des Zirkels. [§ 34, Zus. 1 und § 36, Aufg. 1.]

§ 37.

Lehrsatz 1. Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Sehnenvierecks ist der Pol zur Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks.

Beweis. [Fig. 21a.] $A_1A_2B_1B_2$ ist ein Sehnenviereck, P der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen und CD die Verbindungsgerade der Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten. Nach § 36, Aufg. 1, ist CD die Polare von P.

Lehrsatz 2. Wenn die Ecken eines Sehnenvierecks die Berührungspunkte eines Tangentenvierecks sind, so ist

1) der Schnittpunkt der Diagonalen des Sehnenvierecks der Pol zu der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Tangentenvierecks, und

2) der Schnittpunkt der Diagonalen des Tangentenvierecks der Pol zu der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks.

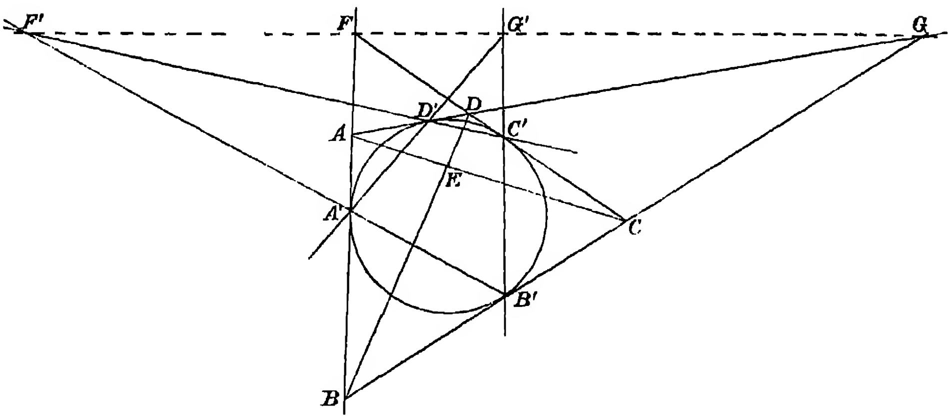

Fig. 22.

Beweis. [Fig. 22.]

1) Nach § 32 ist A'C'*) die Polare zu F und B'D' die Polare zu G, folglich ist nach § 34, Zus. 3, die Gerade FG die Polare des Durchschnittspunktes E' der Diagonalen A'C' und B'D'.

2) Nach § 32 ist A'D' die Polare zu A und B'C' die Polare zu C, folglich ist nach § 34, Zus. 3, die Diagonale AC die Polare des Durchschnittspunktes G' von A'D' und B'C'. Ebenso ergiebt sich, daß die Diagonale BD die Polare des Durchschnittpunktes F' von A'B' und C'D' ist.

*) Die Diagonalen A'C' und B'D' und ihr Schnittpunkt E' fehlen in der Figur.

Folglich ist nach § 34, Zus. 3, F'G' die Polare des Durchschnittspunktes E der beiden Diagonalen AC und BD.

Zusatz. Wenn die Ecken eines Sehnenvierecks die Berührungspunkte eines Tangentenvierecks sind, so gehen die Diagonalen der beiden Vierecke durch einen Punkt, und die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks und je zweier gegenüberliegenden Seiten des Tangentenvierecks liegen in einer Geraden.

Beweis. [Fig. 22.] Nach § 37, Lehrs. 1, ist der Durchschnittspunkt E' der Diagonalen A'C' und B'D' des Sehnenvierecks der Pol zu der Geraden F'G'; nach § 37, Lehrs, 2, 2, ist der Durchschnittspunkt E der Diagonalen AC und BD des Tangentenvierecks der Pol zu F'G'; folglich fallen E' und E zusammen.

Ferner ist nach § 37, Lehrs. 1, F'G' Polare zu E' und nach § 37, Lehrs. 2, 1, auch FG Polare zu E', folglich liegen F, G, F' und G' auf einer Geraden.

§ 38.

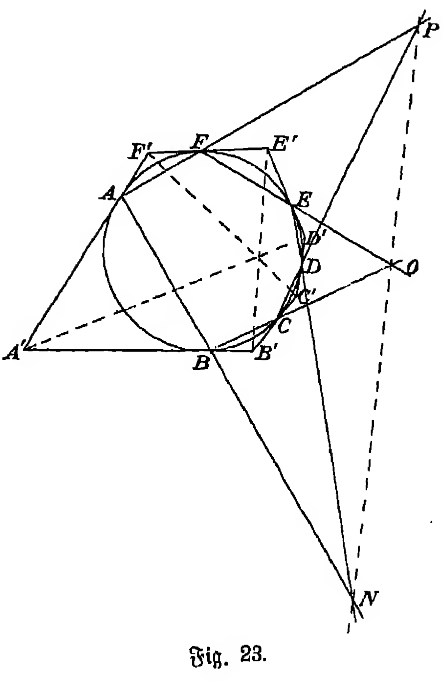

Fig. 23.

Lehrsatz. (Satz des Brianchon.) In jedem Tangentensechseck schneiden die drei Verbindungsgeraden je zweier gegenüberliegenden Ecken einander in einem Punkte.

Beweis. [Fig. 23.] Da AB die Polare zu A' und DE die Polare zu D', so ist A'D' die Polare zu N; ebenso ist B'E' die Polare zu O und C'F' die Polare zu P. Da nun nach dem Satze des Pascal § 20 N, O, P auf einer Geraden liegen, so müssen nach § 34, Zus. 1, die Polaren dieser drei Punkte durch einen Punkt gehen, den Pol der Geraden NOP.

§ 39.

Übungen.

1. Die Pole der Seiten und die Polaren der Ecken eines a) gleichseitigen Dreiecks, b) Quadrates in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis zu finden.

2. Die Polaren der Ecken und die Pole der Seiten eines a) gleichseitigen Dreiecks, b) Quadrates in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis durch Konstruktion und durch Berechnung zu finden.

3. Die Pole der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in Bezug auf einen Kreis, der durch eine Ecke geht und die gegenüberliegende Seite a) im Halbierungspunkte, b) in dem einen Endpunkte berührt, durch Konstruktion und Berechnung zu finden.

4. An einen Kreis sind zwei Tangenten gezogen. In Bezug auf diesen Kreis die Pole der Seiten des Dreiecks zu finden, welches von den beiden Tangenten und a) einer dritten Tangente, b) der Berührungssehne gebildet wird.

5. Gegeben ein Punkt P und eine Gerade p. Es soll der Kreis konstruiert werden, in Bezug auf welchen p die Polare zu P ist, wenn gegeben ist a) der eine der beiden Schnittpunkte (A) des Kreises mit der von P auf p gefällten Senkrechten (PF). [Darf AP = AF sein?] b) der Mittelpunkt des Kreises. c) eine Gerade, auf welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt. d) der Halbmesser des Kreises. e) ein Punkt (A) des Kreises. [Die Gerade AP schneide p in B, dann suche man zu P, B, A den zu A gehörigen vierten harmonischen Punkt. § 35.] f) eine Tangente. [Die Tangente schneide p in A und berühre den Kreis in X; die Gerade PX schneide den Kreis in Y und p in Z. Dann sind AP, AZ, AX, AY vier harmonische Strahlen, von denen drei bekannt sind.]

6. Ist eine Ecke eines Dreiecks der Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf einen festen Kreis, so a) liegen die Pole der beiden anderen Seiten auf der ersten Seite oder ihrer Verlängerung. b) gehen die Polaren der beiden anderen Ecken durch diese Ecke.

7. Zieht man von mehreren Punkten einer Geraden nach einem Kreise die Tangenten, so schneiden die Berührungssehnen einander in einem Punkte, dem Pole der Geraden.

8. Zieht man von einem beliebigen Punkte einer Sekante eines Kreises nach dem Kreise die beiden Tangenten, so ist der Schnittpunkt der Berührungssehne und der vom Mittelpunkte auf die erste Sekante gefällten Senkrechten der Pol der Sekante.

9a. Die Polaren von vier harmonischen Punkten in Bezug auf einen festen Kreis sind vier harmonische Strahlen.

9b. Die Pole von vier harmonischen Strahlen in Bezug auf einen festen Kreis sind vier harmonische Punkte. [§ 34, Zus. 2, § 30, 11.]

10. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, welche einander rechtwinklig schneiden, ist die Polare jedes der beiden Mittelpunkte in Bezug auf den anderen Kreis.

11. Liegen die Mittelpunkte beliebig vieler Kreise, welche einen festen Kreis rechtwinklig schneiden, auf einer Geraden, so gehen die gemeinschaftlichen Sehnen dieser Kreise und des festen Kreises durch den Pol der Geraden.

12. Wenn zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, so wird jeder Durchmesser (C_1C_2) des einen Kreises (M) durch den anderen Kreis (M′) harmonisch geteilt (in D_1 und D_2). [$MD_1 \cdot MD_2 = r^2$; $MD_1 : r = r : MD_2$; $(r + MD_1) : (r - MD_1) = (MD_2 + r) : (MD_2 - r)$.]

13. Konstruiert man zu einem festen Punkte in Bezug auf einen festen Kreis den Pol und errichtet auf der Verbindungsstrecke der beiden Pole die Mittelsenkrechte, so ist diese der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den festen Punkt gehen und den festen Kreis rechtwinklig schneiden.

14. Der Schnittpunkt (C, Fig. 21a) zweier gegenüberliegenden Seiten eines Sehnenvierecks ist der Pol der Verbindungsgeraden des Schnittpunktes (D) der beiden anderen Seiten und des Schnittpunktes (P) der Diagonalen. [Da nach § 37, Lehrs. 1, P der Pol zu CD ist, so geht die Polare zu C durch P. Bezeichnet man den Schnittpunkt von DP und A_1C mit F, so sind C, F, A_2, A_1 harmonische Punkte, folglich geht nach § 35, Zus., die Polare zu C auch durch F. Folglich ist PFD die Polare zu C. Ebenso ist PC die Polare zu D.]

15. In jedem Sehnenviereck sind die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten und der Schnittpunkt der Diagonalen die Ecken eines Dreiecks, in welchem jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf den dem Viereck umbeschriebenen Kreis ist.

16. Sind die Ecken eines Sehnenvierecks die Berührungspunkte der Seiten eines Tangentenvierecks, so ist a) jede Ecke des Tangentenvierecks der Pol einer Seite des Sehnenvierecks. b) der Durchschnittspunkt je zweier gegenüberliegenden Seiten des Tangentenvierecks der Pol einer Diagonale des Sehnenvierecks. c) der Durchschnittspunkt je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks der Pol einer Diagonale des Tangentenvierecks. d) jede der beiden Diagonalen des Tangentenvierecks geht verlängert durch den Schnittpunkt zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks. [Denn nach c) ist in Fig. 22 BED die Polare zu F′; nach Übung 14 ist aber auch die Verbindungsgerade EG′ die Polare zu F′; folglich liegen B, E, D, G′ auf einer Geraden.] e) die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks und die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Tangentenvierecks sind harmonische Punkte.

4. Kreispotenzen.

§ 40.

Erklärung. Unter der Potenz eines festen Punktes in Bezug auf einen festen Kreis versteht man nach Planim. § 138, Zus. 2 und Erkl. 2, das konstante Produkt aus den beiden Abschnitten, welche auf jedem durch den Punkt gehenden Strahle durch den Kreis begrenzt werden.

Je nachdem der Punkt sich außerhalb oder innerhalb des Kreises befindet, liegen die Abschnitte eines jeden Strahles auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Punktes. Man faßt die Abschnitte im ersten Falle als gleichartige, im zweiten als entgegengesetzte algebraische

Größen auf; folglich ist das Produkt aus den Abschnitten positiv oder negativ, je nachdem der Punkt außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Folgerungen 1. Für einen Punkt außerhalb eines Kreises ist die Potenz in Bezug auf diesen Kreis positiv; je mehr sich der Punkt dem Mittelpunkte nähert, desto kleiner wird seine Potenz. Für einen Punkt des Kreises ist die Potenz gleich Null. Für einen Punkt innerhalb des Kreises ist die Potenz negativ; sie wird um so kleiner (der absolute Wert um so größer), je mehr sich der Punkt dem Mittelpunkte nähert. Für den Mittelpunkt selbst ist die Potenz gleich dem negativen Quadrate des Radius.

2. Für einen Punkt außerhalb eines Kreises ist die Potenz in Bezug auf diesen Kreis gleich dem Quadrate der von ihm an den Kreis gelegten Tangente; für einen Punkt innerhalb des Kreises ist die Potenz gleich dem negativen Quadrate der halben kleinsten der durch ihn gehenden Sehnen.

Lehrsatz. Die Potenz eines jeden Punktes in Bezug auf einen Kreis ist gleich der Differenz aus dem Quadrate seines Abstandes vom Mittelpunkte und dem Quadrate des Radius.

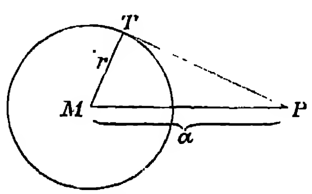

Fig. 24a.

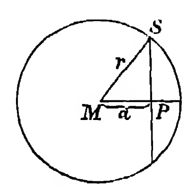

Fig. 24b.

Beweis. In Fig. 24a ist die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis (M, r)

$$PT^2 = PM^2 - MT^2 = a^2 - r^2.$$

In Fig. 24b ist die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis (M, r)

$$-PS^2 = -(MS^2 - PM^2) = -(r^2 - a^2) = a^2 - r^2.$$

§ 41.

Lehrsatz. Der **geometrische Ort** aller Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenzen haben, ist eine Senkrechte zur Mittelpunktsgeraden der beiden Kreise.

Beweis. Ist P ein Punkt, der in Bezug auf zwei feste Kreise (M_1, r_1) und (M_2, r_2) gleiche Potenzen hat, und bezeichnet man die Abstände des Punktes P von M_1 und M_2 bez. mit a_1 und a_2, so ist nach § 40, Lehrs.,

$$a_1^2 - r_1^2 = a_2^2 - r_2^2,$$
$$a_1^2 - a_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Die Differenz der Quadrate der Abstände des Punktes P von den beiden festen Mittelpunkten M_1 und M_2 ist also konstant. Die Behauptung ergiebt sich daher aus § 2.

Erklärung. Den geometrischen Ort aller Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenzen haben, nennt man Potenzgerade oder Chordale der beiden Kreise.

Folgerung. Die Potenzgerade zweier Kreise ist eine Senkrechte zur Mittelpunktsgeraden der beiden Kreise. Man erhält dieselbe, wenn man von einem beliebigen Punkte, der in Bezug auf die beiden Kreise gleiche Potenzen hat, auf die Mittelpunktsgerade die Senkrechte fällt.

§ 42.

Zusätze. 1. Die Potenzgerade zweier einander von innen oder von außen berührenden Kreise ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte.

2. Die Potenzgerade zweier einander schneidenden Kreise ist die durch die beiden Schnittpunkte der Kreise gehende Gerade.

3. Die Potenzgerade zweier Kreise, von denen der eine ganz außerhalb des anderen liegt, liegt zwischen den beiden Kreisen. [Ergiebt sich aus den Vorzeichen der Potenzen.]

4. Die Potenzgerade zweier Kreise, von denen der eine ganz innerhalb des anderen liegt, liegt außerhalb beider Kreise; sie schneidet die Verlängerung der Mittelpunktsstrecke über den Mittelpunkt des kleineren Kreises hinaus.

§ 43.

Lehrsatz. Die Potenzgeraden dreier Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, schneiden einander in **einem** Punkte.

Beweis. Schneiden die Potenzgerade des ersten und zweiten Kreises und die Potenzgerade des zweiten und dritten Kreises einander in einem Punkte P, so sind auch die Potenzen des Punktes P in Bezug auf den ersten und dritten Kreis einander gleich, P muß also auch auf der Potenzgeraden des ersten und dritten Kreises liegen.

Erklärung. Der Schnittpunkt der drei Potenzgeraden dreier Kreise heißt der **Potenzmittelpunkt** (der Chordalpunkt) der drei Kreise.

Aufgabe 1. Die Potenzgerade zweier einander nicht schneidenden Kreise zu finden.

Auflösung. Man zeichnet einen beliebigen dritten Kreis, welcher die beiden festen Kreise schneidet, und dessen Mittelpunkt nicht auf der Mittelpunktsgeraden der beiden festen Kreise liegt, zieht die beiden gemeinschaftlichen Sehnen und fällt vom Schnittpunkte dieser Sehnen oder ihrer Verlängerungen auf die Mittelpunktsgerade der beiden festen Kreise die Senkrechte. Dann ist diese Senkrechte die gesuchte Potenzgerade. Oder man schneidet die beiden Kreise durch zwei beliebige Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf der Mittelpunktsgeraden der beiden ersten Kreise liegen, bestimmt die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Sehnen des 1., 2. und 3. Kreises und des 1., 2. und 4. Kreises und verbindet diese beiden Schnittpunkte.

Aufgabe 2. Zu einem festen Kreise und einer festen Geraden einen Kreis zu zeichnen, so daß die feste Gerade die Potenzgerade der beiden Kreise wird.

Auflösung. Man schneide den festen Kreis durch einen beliebigen Kreis, ziehe von dem Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Sehne der beiden Kreise mit der festen Geraden nach dem zweiten Kreise eine beliebige Sekante und zeichne den Kreis, der durch die Schnittpunkte der Sekante mit dem zweiten Kreise geht, und dessen Mittelpunkt auf der von dem Mittelpunkte des festen Kreises auf die feste Gerade gefällten Senkrechten liegt.

Wie viele Kreise erhält man?

§ 44.

Lehrsatz. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei feste Kreise rechtwinklig schneiden, ist die Potenzgerade der beiden festen Kreise, soweit sie außerhalb der beiden Kreise verläuft.

Beweis. Ist M der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei feste Kreise M_1 und M_2 rechtwinklig schneidet, und bezeichnet man den einen der beiden Schnittpunkte der Kreise M und M_1 mit T_1 und den einen der beiden Schnittpunkte der Kreise M und M_2 mit T_2, so sind MT_1 und MT_2 Tangenten an die Kreise M_1 bez. M_2 und als Radien einander gleich. Folglich ist M ein Punkt der Potenzgeraden der beiden festen Kreise.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß jeder beliebige Punkt der Potenzgeraden zweier festen Kreise, so weit sie außerhalb der beiden Kreise verläuft, der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die beiden festen Kreise rechtwinklig schneidet.

Zusatz. Wenn zwei Kreise von zwei anderen Kreisen rechtwinklig geschnitten werden, so ist die Potenzgerade des einen Paares die Mittelpunktsgerade des anderen Paares.

§ 45.

Lehrsatz. Werden zwei Kreise von einem dritten Kreise berührt, so liegt der Pol der Potenzgeraden der beiden ersten Kreise in Bezug auf den dritten Kreis mit den beiden Berührungspunkten auf einer Geraden.

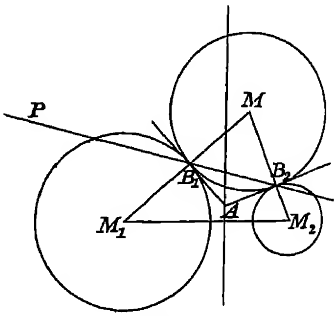

Fig. 25.

Beweis. [Fig. 25.] Die Tangenten an die beiden ersten Kreise M_1 und M_2 in den Berührungspunkten B_1 und B_2 mit dem dritten Kreise M schneiden einander in einem Punkte A der Potenzgeraden von M_1 und M_2. Da A der Pol zu B_1B_2 in Bezug auf den Kreis M ist, so muß der Pol P der Potenzgeraden in Bezug auf M auf B_1B_2 liegen. [§ 34, Zus. 2.]

§ 46.

Übungen.

1. Wie verhalten sich die Potenzen aller Punkte des einen von zwei konzentrischen Kreisen in Bezug auf den anderen?

2. Der geometrische Ort aller Punkte, welche in Bezug auf einen festen Kreis eine gegebene Potenz haben, ist ein konzentrischer Kreis, der größer oder kleiner ist als der feste Kreis, je nachdem die Potenz positiv oder negativ ist. Den geometrischen Ort zu konstruieren, wenn die gegebene Potenz gleich a) a^2, b) $-a^2$ ist.

3. Auf a) einer festen Geraden, b) einem festen Kreise einen Punkt zu finden, dessen Potenz in Bezug auf einen festen Kreis gegeben ist.

4. Wie verhält sich die Potenz eines beliebigen Punktes des einen von zwei konzentrischen Kreisen in Bezug auf den anderen zur Potenz eines beliebigen Punktes des zweiten Kreises in Bezug auf den ersten?

5. Läßt sich zu jedem Punkte a) innerhalb, b) außerhalb eines Kreises ein Punkt a) außerhalb, b) innerhalb des Kreises finden, so daß die Potenzen beider Punkte in Bezug auf den Kreis gleiche absolute Werte haben?

6. Was versteht man unter der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Punkt? [Man betrachtet den letzten Punkt als Grenze, welcher sich ein Kreis mit unbeschränkt abnehmendem Radius nähert. Dann wird die Tangente von dem Punkte an den Kreis zur Verbindungsstrecke der beiden Punkte.]

7. Die von einem beliebigen Punkte der Potenzgeraden zweier festen Kreise, soweit sie außerhalb der beiden Kreise verläuft, an die beiden Kreise gelegten Tangenten sind einander gleich.

8. Auf a) einer festen Geraden, b) einem festen Kreise einen Punkt zu finden, so daß die von ihm an zwei feste Kreise gelegten Tangenten gleich lang sind.

9. Einen Punkt zu finden, so daß die von ihm an drei feste Kreise gelegten Tangenten gleich lang sind.

10. Die durch einen beliebigen Punkt der Potenzgeraden zweier festen Kreise, soweit sie innerhalb der beiden Kreise verläuft, gelegten kleinsten Sehnen in beiden Kreisen sind gleich lang.

11. Jeder Punkt der Potenzgeraden zweier einander schneidenden Kreise, soweit sie innerhalb der beiden Kreise verläuft, ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher von jedem der beiden ersten in den Endpunkten eines Durchmessers geschnitten wird.

12. Die Potenzgeraden mehrerer Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, sind entweder parallel oder fallen in eine Gerade zusammen.

13. Fallen zwei Potenzgerade dreier Kreise zusammen, so fällt auch die dritte Potenzgerade mit den beiden ersten zusammen.

14. Die Potenzgerade zweier Kreise halbiert die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise.

15. Die vier Halbierungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen auf einer Geraden.

16. Bezeichnet man die Entfernungen des Schnittpunktes F der Potenzgeraden und der Mittelpunktsgeraden zweier Kreise (M_1, r_1) und (M_2, r_2) von den Mittelpunkten mit c_1 und c_2, so ist $c_1{}^2 - c_2{}^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2$. Was ergiebt sich hieraus für die Lage des Schnittpunktes F in Bezug auf die beiden Mittelpunkte und in Bezug auf die benachbarten Schnittpunkte der Kreise mit der Mittelpunktsgeraden, wenn a) $r_1 = r_2$? b) $r_1 > r_2$?

17. Wie groß sind die Strecken c_1 und c_2 der Übung 16? [Liegt der Punkt F zwischen M_1 und M_2, so ist (1) $c_1 + c_2 = c$, wenn c die Mittelpunktsstrecke bedeutet, und (2) $c_1{}^2 - c_2{}^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2$. Hieraus ergiebt sich

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\left[c + \frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{c}\right] \text{ und } c_2 = \tfrac{1}{2}\left[c - \frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{c}\right].$$

Liegt F auf der Verlängerung von M_1M_2 über M_2 hinaus, so ist

$$(1)\ c_1 - c_2 = c \text{ und } (2)\ c_1{}^2 - c_2{}^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2.]$$

18. Die Potenzgerade zweier konzentrischen Kreise liegt in unendlicher Entfernung.

19. Wenn zwei einander schneidende Kreise von einem dritten Kreise berührt werden, so schneiden die gemeinschaftliche Sehne der beiden ersten Kreise und die durch die Berührungspunkte gelegten Tangenten des dritten Kreises einander in einem Punkte.

20. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Potenzgeraden zweier festen Kreise an jeden derselben eine Tangente, so ist der Schnittpunkt der

beiden Berührungsradien der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die beiden festen Kreise berührt und zwar in den Berührungspunkten der beiden festen Kreise mit den beiden Tangenten.

21. Der Potenzmittelpunkt dreier Kreise ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher entweder alle drei Kreise rechtwinklig schneidet oder von allen drei Kreisen in den Endpunkten eines Durchmessers geschnitten wird, je nachdem der Potenzmittelpunkt außerhalb oder innerhalb der Kreise liegt.

22a. Die Potenzgerade eines Kreises und eines Punktes ist die Mittelsenkrechte des Abstandes des Punktes von seiner Polare in Bezug auf den Kreis. [Geht der eine von zwei Kreisen in einen Punkt über (Übung 6), so gehen die gemeinschaftlichen Tangenten an beide Kreise in die beiden Tangenten von dem Punkte an den anderen Kreis über.]

22b. Die Potenzgerade zweier Punkte ist die Mittelsenkrechte des Abstandes der beiden Punkte.

22c. Die Potenzgerade eines Kreises und einer Geraden ist die Gerade selbst. [Man betrachtet die Gerade als Grenze, welcher sich ein Kreis mit unbeschränkt zunehmendem Radius nähert.]

22d. Die Potenzgerade einer Geraden und eines Punktes ist die Gerade selbst.

23. Die von einem beliebigen Punkte der Potenzgeraden eines festen Kreises und eines festen Punktes an den Kreis gezogenen Tangenten und der Abstand dieses Punktes von dem festen Punkte sind einander gleich.

24. Auf a) einer festen Geraden, b) einem festen Kreise einen Punkt zu finden, so daß sein Abstand von einem festen Punkte gleich den von ihm an einen festen Kreis gelegten Tangenten ist.

25. Die von einem festen Punkte an einen festen Kreis gezogenen Tangenten werden durch die Potenzgerade des Kreises und des Punktes halbiert.

26. Einen Punkt zu finden, so daß die von ihm an zwei feste Kreise gelegten Tangenten gleich seinem Abstande von einem festen Punkte sind.

27. Einen Punkt zu finden, so daß die von ihm an einen festen Kreis gelegten Tangenten gleich seinen Abständen von zwei festen Punkten sind.

28. Legt man an zwei feste Kreise die beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten und von einem festen Punkte an jeden der beiden Kreise die Tangenten, legt durch die Halbierungspunkte jedes der drei Tangentenpaare die Gerade, so schneiden diese drei Geraden einander in einem Punkte.

29. Legt man an zwei feste Kreise die beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, legt von einem festen Punkte des einen Kreises an den anderen Kreis die beiden Tangenten, legt durch die Halbierungspunkte jedes der beiden Tangentenpaare die Gerade, so schneiden diese Geraden und die Tangente an den ersten Kreis in dem festen Punkte desselben einander in einem Punkte.

30. Legt man von jedem von zwei festen Punkten an einen Kreis die Tangenten, legt durch die Halbierungspunkte jedes Tangentenpaares die Geraden, so schneiden diese beiden Geraden und die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte einander in einem Punkte.

31. Die Potenzgerade eines festen Kreises und eines festen Punktes ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche den festen Kreis rechtwinklig schneiden und durch den festen Punkt gehen.

32. Einen Kreis zu konstruieren, welcher a) drei feste Kreise rechtwinklig schneidet. b) zwei feste Kreise rechtwinklig schneidet und durch einen festen Punkt geht. c) einen Kreis rechtwinklig schneidet und durch zwei feste Punkte geht.

33a. Wenn zwei feste Kreise (M_1 und M_2) einander berühren, so berührt jeder Kreis (M), welcher die beiden festen Kreise rechtwinklig schneidet, die Mittelpunktsgerade der beiden festen Kreise im Berührungspunkte dieser Kreise. [M liegt auf der Potenzgeraden von M_1 und M_2, der Schnittpunkt dieser Potenzgeraden mit der Geraden M_1M_2 sei F, der Kreis M schneide den Kreis M_1 in einem Punkte T_1, dann ist $MT_1 = MF$.]

33b. Wenn zwei feste Kreise einander schneiden, so trifft jeder Kreis, welcher die beiden festen Kreise rechtwinklig schneidet, die Mittelpunktsgerade der beiden festen Kreise nicht. [$MT_1{}^2 = MM_1{}^2 - M_1T_1{}^2$; $MF^2 = MM_1{}^2 - M_1F^2$; $M_1T_1 > M_1F$; folglich $MT_1 < MF$.]

33c. Wenn zwei feste Kreise einander weder berühren, noch schneiden, so schneidet jeder Kreis, welcher die beiden festen Kreise rechtwinklig schneidet, die Mittelpunktsgerade der beiden festen Kreise in zwei festen Punkten.

5. Ähnlichkeitspunkte und -strahlen. Die Berührungsaufgaben des Apollonius.

§ 47.

Erklärung. Beschreibt ein Punkt A eine (gerade oder krumme) Linie l, und bestimmt man auf der Verbindungsgeraden eines festen Punktes P mit dem Punkte A einen Punkt A′ so, daß PA : PA′ = m : n, so beschreibt der Punkt A′ eine Linie l′. Je näher der Punkt A dem Punkte P rückt, desto mehr nähert sich auch der Punkt A′ dem Punkte P, und fällt A mit P zusammen, so rückt auch A′ in P hinein.

Wenn zwei feste (gerade oder krumme) Linien (l und l′) so beschaffen sind, daß, wenn man von einem festen Punkte (P) nach ihnen Strahlen zieht, je zwei entsprechende Abschnitte auf jedem dieser Strahlen (PA_1 und PA_1', PA_2 und PA_2', PA_3 und PA_3'...) in einem festen Verhältnisse (m : n) stehen, so heißen die beiden Linien ähnlich nach diesem Verhältnisse (m : n), und man sagt von ihnen, daß sie sich in Bezug auf den festen Punkt in ähnlicher Lage befinden. Verleiche Planim. § 136, Aufg. 4, Anm. Der feste Punkt heißt der Ähnlichkeitspunkt und die durch ihn gehenden Geraden Ähnlichkeitsstrahlen. Je zwei Punkte der beiden festen Linien, welche auf demselben Ähnlichkeitsstrahle liegen und auf diesem zwei in dem festen Verhältnisse stehende Abschnitte begrenzen, nennt man entsprechende Punkte. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte einer festen Linie und die Verbindungsstrecke der beiden diesen Punkten entsprechenden Punkte einer ähnlichen und ähnlich liegenden festen Linie heißen entsprechende Strecken. Der Ähnlichkeitspunkt heißt äußerer oder

innerer Ähnlichkeitspunkt, je nachdem er die Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte außen oder innen in dem festen Verhältnisse teilt. Im zweiten Falle sagt man, daß die ähnlichen Linien umgekehrt ähnlich liegen. In beiden Fällen sagt man auch von den beiden festen Linien, daß sie sich in perspektivischer Lage befinden.

Aufgabe. Zu einer festen (geraden oder krummen) Linie in Bezug auf einen festen Punkt eine ähnliche und a) ähnlich, b) umgekehrt ähnlich liegende Linie zu zeichnen nach einem gegebenen Verhältnisse.

§ 48.

Folgerungen. 1. Die einer festen Geraden in Bezug auf einen festen Punkt ähnliche und ähnlich oder umgekehrt ähnlich liegende Linie ist ebenfalls eine Gerade.

2. Die einem festen regelmäßigen Vielecke in Bezug auf einen festen Punkt ähnliche und ähnlich oder umgekehrt ähnlich liegende Linie ist ebenfalls ein regelmäßiges Vieleck.

3. Die einem festen Kreise in Bezug auf einen festen Punkt ähnliche und ähnlich oder umgekehrt ähnlich liegende Linie ist ebenfalls ein Kreis.

4. Alle entsprechenden Strecken sind parallel und stehen in dem festen Verhältnisse.

5. Alle entsprechenden Winkel sind gleich.

6. Ähnliche Vielecke lassen sich stets in ähnliche oder in umgekehrt ähnliche Lage bringen.

7. Wenn zwei ähnliche regelmäßige Vielecke von gerader Seitenzahl in ähnlicher Lage liegen, so liegen sie zugleich in umgekehrt ähnlicher Lage; sie haben daher einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt.

§ 49.

Lehrsatz. Die durch die Endpunkte je zweier parallelen und gleichgerichteten Radien zweier Kreise gelegten Geraden schneiden einander in **einem** Punkte der Mittelpunktsgeraden und teilen die Mittelpunktsstrecke außen im Verhältnisse der beiden Radien. Die durch die Endpunkte je zweier parallelen und entgegengesetzt gerichteten Radien zweier Kreise gelegten Geraden schneiden einander in **einem** Punkte der Mittelpunktsgeraden und teilen die Mittelpunktsstrecke innen im Verhältnisse der beiden Radien.

Beweis. [Fig. 26.] Sind $M_1P_1 = r_1$ und $M_2P_2 = r_2$ zwei parallele und gleichgerichtete Radien, $r_1 < r_2$, so teilt die Gerade P_1P_2 die

Mittelpunktsstrecke M_1M_2 im Punkte A außen im Verhältnisse $r_1 : r_2$. Sind M_1P_1' und M_2P_2' zwei andere parallele und gleichgerichtete Radien, so teilt auch die Gerade $P_1'P_2'$ die Mittelpunktsstrecke M_1M_2 außen im Verhältnisse $r_1 : r_2$. Folglich muß dieser Teilpunkt, da er mit A auf der Verlängerung von M_1M_2 über M_1 hinaus liegt, nach Planim. § 120, Anm. 2, mit A zusammenfallen.

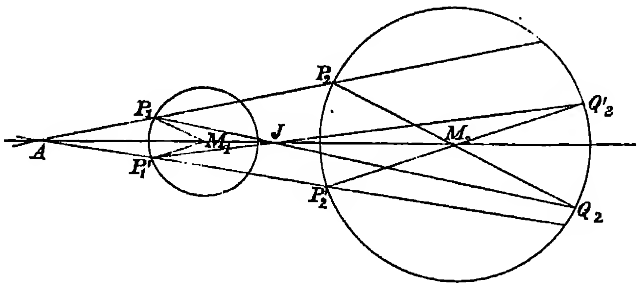

Fig. 26.

Ebenso teilen die Geraden P_1Q_2 und $P_1'Q_2'$ die Mittelpunktsstrecke M_1M_2 innen im Verhältnisse $r_1 : r_2$ und zwar so, daß die Teilpunkte näher an M_1 liegen, also müssen diese Geraden nach Planim. § 120, Anm. 2, M_1M_2 in demselben Punkte J schneiden.

Zusatz. Die Abschnitte der durch die Endpunkte zweier parallelen und gleichgerichteten oder zweier parallelen und entgegengesetzt gerichteten Radien gelegten Geraden, gerechnet vom Schnittpunkte der Geraden mit der Mittelpunktsgeraden bis zu den Endpunkten der Radien, verhalten sich wie die beiden Radien. $AP_1 : AP_2 = JP_1 : JQ_2 = r_1 : r_2$.

§ 50.

Lehrsatz. (Umkehrung.) Teilt man die Mittelpunktsstrecke zweier beliebigen Kreise im Verhältnisse der beiden Radien harmonisch und zwar so, daß die Teilpunkte näher am Mittelpunkte des kleineren Kreises liegen, und zieht durch den einen der beiden Teilpunkte eine beliebige Sekante, so sind die Radien nach je zwei entsprechenden Schnittpunkten parallel, und die auf der Sekante durch je zwei entsprechende Schnittpunkte begrenzten Abschnitte verhalten sich wie die beiden Radien.

Zusätze. 1. Zwei Kreise befinden sich stets in ähnlicher und umgekehrt ähnlicher Lage. Die beiden Punkte, in welchen die Mittelpunktsstrecke im Verhältnisse der beiden Radien harmonisch geteilt wird und zwar o

daß die Teilpunkte näher am Mittelpunkte des kleineren Kreises liegen, sind der äußere und der innere Ähnlichkeitspunkt.

2. Die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise schneiden die Mittelpunktsgerade im äußeren, die inneren gemeinschaftlichen Tangenten im inneren Ähnlichkeitspunkte.

3. Jede durch einen der beiden Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise an den einen Kreis gelegte Tangente berührt auch den anderen Kreis.

4. Berühren zwei Kreise einander von außen, so ist der Berührungspunkt der innere Ähnlichkeitspunkt. Berühren zwei Kreise einander von innen, so ist der Berührungspunkt der äußere Ähnlichkeitspunkt. Liegt der eine Kreis ganz außerhalb des anderen, so liegen die beiden Ähnlichkeitspunkte außerhalb der beiden Kreise. Liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so liegen die beiden Ähnlichkeitspunkte innerhalb des kleineren Kreises. Die Ähnlichkeitspunkte zweier konzentrischen Kreise fallen in den Mittelpunkt. Schneiden zwei Kreise einander, so liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt außerhalb der beiden Kreise, der innere in dem gemeinschaftlichen Stücke beider Kreisflächen.

5. Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und eines Punktes, und ebenso die Ähnlichkeitspunkte einer Geraden und eines Punktes fallen in den Punkt. Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und einer Geraden sind die Endpunkte des auf der Geraden senkrecht stehenden Durchmessers.

§ 51.

Lehrsatz. Auf jedem durch einen der beiden Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise gehenden Ähnlichkeitsstrahle werden durch zwei nicht entsprechende Punkte beider Kreise Abschnitte begrenzt, deren Produkte einander gleich sind, und zwar gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Potenzen des Ähnlichkeitspunktes in Bezug auf jeden der beiden Kreise.

Beweis. [Fig. 27a und b.]

$$\begin{aligned} AP_1 : AP_2 &= r_1 : r_2, \\ AP_2' : AP_1' &= r_2 : r_1, \\ \hline (1) \quad AP_1 \, . \, AP_2' &= AP_2 \, . \, AP_1'. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Potenzen von A in Bezug auf die beiden Kreise M_1 und M_2 bez. mit p_1 und p_2, so ist

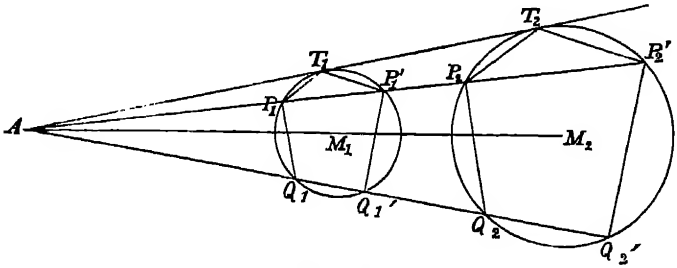

Fig. 27a.

$$AP_1 \,.\, AP_1' = p_1,$$
$$AP_2 \,.\, AP_2' = p_2,$$

(2) $$AP_1 \,.\, AP_2' \,.\, AP_2 \,.\, AP_1' = p_1 p_2.$$

Aus (1) und (2) folgt

(3) $$AP_1 \,.\, AP_2' = AP_2 \,.\, AP_1' = \sqrt{p_1 p_2}.$$

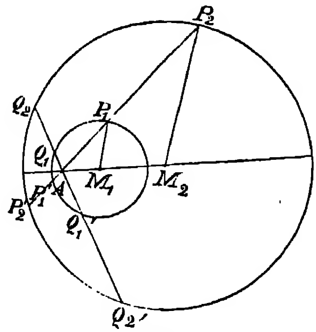

Fig. 27b.

Ebenso ergiebt sich

(4) $$AQ_1 \,.\, AQ_2' = AQ_2 \,.\, AQ_1' = \sqrt{p_1 p_2},$$

$$AP_1 \,.\, AP_2' = AP_2 \,.\, AP_1' = AQ_1 \,.\, AQ_2' = AQ_2 \,.\, AQ_1' = \sqrt{p_1 p_2}.$$

Ebenso ist der Beweis für den inneren Ähnlichkeitspunkt J.

§ 52.

Satz des Monge. Bei drei Kreisen liegen die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte, welche zu je zweien dieser Kreise gehören, auf einer Geraden; ebenso liegt auch jeder äußere Ähnlichkeitspunkt mit den beiden nicht zugehörigen inneren Ähnlichkeitspunkten auf einer Geraden.

Beweis. [Fig. 28.] Es ist

$$A_{12}M_1 : A_{12}M_2 = r_1 : r_2,$$
$$A_{23}M_2 : A_{23}M_3 = r_2 : r_3,$$
$$A_{13}M_3 : A_{13}M_1 = r_3 : r_1,$$

$$A_{12}M_1 \,.\, A_{23}M_2 \,.\, A_{13}M_3 = A_{12}M_2 \,.\, A_{23}M_3 \,.\, A_{13}M_1,$$

folglich liegen nach § 19, 2 A_{12}, A_{23} und A_{13} auf einer Geraden.

Ebenso ergiebt sich der zweite Teil des Lehrsatzes. [Vergl. § 21, 11.]

Erklärung. Die Geraden, auf welchen die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise oder je ein äußerer und die beiden nicht zugehörigen inneren Ähnlichkeitspunkte liegen, heißen Ähnlichkeitsachsen; die erste die äußere, die drei letzten die inneren.

Zusätze. 1. Werden zwei Kreise von einem dritten Kreise gleichartig berührt, d. h. beide von außen oder beide von innen, so liegen die beiden Berührungspunkte der beiden ersten Kreise mit dem dritten und der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise auf einer Geraden (die Berührungssekante des dritten Kreises geht durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise). [§ 50, Zus. 4.]

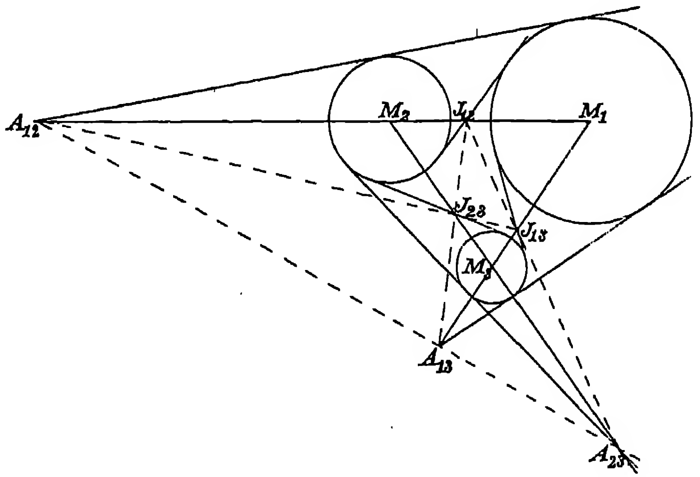

Fig. 28.

2. Werden zwei Kreise von einem dritten Kreise ungleichartig berührt, d. h. der eine von außen und der andere von innen, so liegen die beiden Berührungspunkte und der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise auf einer Geraden.

3. Werden zwei Kreise M_1 und M_2 von jedem von zwei oder mehreren Kreisen gleichartig (ungleichartig) berührt, so hat der äußere (innere) Ähnlichkeitspunkt A (J) der beiden ersten Kreise gleiche Potenzen für die letzten Kreise.

Die beiden Punkte B_1 und B_2, in welchen die beiden Kreise M_1 und M_2 von irgend einem dritten Kreise gleichartig berührt werden, sind nämlich nach Zus. 1 zwei nicht entsprechende Punkte des Ähnlichkeitsstrahles AB_1B_2; ebenso sind die beiden Punkte B_1' und B_2', in welchen M_1 und M_2 von einem vierten Kreise gleichartig berührt werden, zwei nicht entsprechende

Punkte des Ähnlichkeitsstrahles $AB_1'B_2'$. Folglich ist nach § 51 $AB_1 . AB_2 = AB_1' . AB_2'$, d. h. A hat in Bezug auf den dritten und vierten Kreis gleiche Potenzen.

4. Werden zwei Kreise von jedem von zwei anderen Kreisen gleichartig (ungleichartig) berührt, so geht die Potenzgerade der beiden letzten Kreise durch den äußeren (inneren) Ähnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise.

5. Werden zwei Kreise von jedem von drei anderen Kreisen gleichartig (ungleichartig) berührt, so ist der äußere (innere) Ähnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise der Potenzmittelpunkt der letzten Kreise, und die Berührungssekante jedes der drei letzten Kreise geht durch den Potenzmittelpunkt dieser Kreise.

§ 53.

1. Berühren zwei Kreise X und X' jeden von drei anderen Kreisen M_1, M_2, M_3 entweder gleichartig oder ungleichartig, so kann man folgende Fälle unterscheiden:

a) M_1, M_2 und M_3 werden von X und von X' gleichartig berührt, d. h. entweder werden M_1, M_2 und M_3 von X von außen und von X' von außen, oder von X von innen und von X' von innen,
oder von X von außen (innen) und von X' von innen (außen) berührt;

b) nur M_1 und M_2 werden von X und von X' gleichartig berührt,
z. B. M_1 und M_2 von X von außen, M_3 von X von innen und
M_1 und M_2 von X' von innen, M_3 von X' von außen;

c) nur M_1 und M_3 werden von X und von X' gleichartig berührt, und

d) nur M_2 und M_3 werden von X und von X' gleichartig berührt.

Da im ersten Falle M_1 und M_2 von X und von X' gleichartig berührt werden, so geht die Potenzgerade p von X und X' durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_{12} von M_1 und M_2. Da im ersten Falle auch M_1 und M_3 und ebenso M_2 und M_3 von X und von X' gleichartig berührt werden, so geht p auch durch A_{13} und A_{23}.

Da im zweiten Falle M_1 und M_2 von X und von X' gleichartig berührt werden, dagegen M_1 und M_3 und ebenso M_2 und M_3 ungleichartig, so geht p durch A_{12}, J_{13} und J_{23} u. s. w.

Folglich fällt die Potenzgerade p von X und X' zusammen

im Falle	a)	mit der	äußeren	Ähnlichkeitsachse	A_{12} A_{13} A_{23},
„ „	b)	„ „	inneren	„	A_{12} J_{13} J_{23},
„ „	c)	„ „	inneren	„	A_{13} J_{12} J_{23},
„ „	d)	„ „	inneren	„	A_{23} J_{12} J_{13}.

2. Da nach Annahme in allen vier Fällen die beiden Kreise X und X entweder von jedem der drei Kreise M_1, M_2 und M_3 gleichartig, oder von

jedem dieser drei Kreise ungleichartig berührt werden, so ist nach § 52, 5 entweder der äußere (A) oder der innere (J) Ähnlichkeitspunkt von X und X' der Potenzmittelpunkt (P) der Kreise M_1, M_2 und M_3, und in jedem Falle geht die Berührungssekante jedes der drei Kreise M_1, M_2 und M_3 durch den Potenzmittelpunkt P.

3. Im Falle a) geht nach § 45 die Berührungssekante jedes der drei Kreise M_1, M_2 und M_3 (z. B. M_1) durch den Pol der Ähnlichkeitsachse $A_{12}A_{13}A_{23}$ in Bezug auf diesen Kreis (M_1). Überhaupt geht in jedem der vier Fälle die Berührungssekante jedes der drei Kreise M_1, M_2 und M_3 durch den Pol der zugehörigen Ähnlichkeitsachse in Bezug auf diesen Kreis.

§ 54.

Die Berührungsaufgaben des Apollonius. Einen Kreis zu zeichnen, der irgend drei der Gebilde Punkt, Gerade, Kreis berührt. Es können zehn Fälle unterschieden werden; der gesuchte Kreis soll berühren:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Punkte:	3	2	2	1	1	1	—	—	—	—
Gerade:	—	1	—	2	1	—	3	2	1	—
Kreise:	—	—	1	—	1	2	—	1	2	3.

Erste Lösung.

Die Aufgaben 1. (eine Lösung) und 7. (vier Lösungen) sind schon früher gelöst.

Aufgabe 2. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 geht und eine feste Gerade g berührt.

Auflösung. Berührt der gesuchte Kreis X die feste Gerade g im Punkte Y, und schneidet die durch P_1 und P_2 gelegte Gerade die feste Gerade g in A, so ist $AY^2 = AP_1 . AP_2$. Hierdurch ist Y bestimmt. [Y liegt auf g und auf dem Kreise um A mit AY als Radius.] Zwei oder keine Lösungen, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von g liegen.

Besondere Fälle*): a) $P_1P_2 \parallel g$ (eine Lösung); b) P_1 oder P_2 liegt auf g (eine Lösung); c) P_1 und P_2 liegen auf g (keine Lösung).

Aufgabe 3. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 geht und einen festen Kreis M berührt.

Auflösung. Legt man durch P_1 und P_2 einen beliebigen Kreis M', welcher M in A_1 und A_2 schneidet, und zieht von dem Schnittpunkte B

*) Ebenso sind auch bei den folgenden Aufgaben besondere Fälle zu unterscheiden.

der Geraden P_1P_2 und A_1A_2 eine Tangente BX an M, so ist der durch P_1, P_2 und X gelegte Kreis der gesuchte. Höchstens zwei Lösungen.

Aufgabe 4. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen festen Punkt P geht und zwei feste Gerade g_1 und g_2 berührt.

Auflösung. Da der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises auf der Halbierungsgeraden eines der durch g_1 und g_2 gebildeten Winkel liegt, so findet man nach Planim. § 71, Übung 29 und 30, noch einen zweiten Punkt, durch welchen der gesuchte Kreis hindurchgehen muß. Hiermit ist die Aufgabe 4 auf die Aufgabe 2 zurückgeführt. Zwei Lösungen.

Aufgabe 5. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen festen Punkt P geht, eine feste Gerade g und einen festen Kreis M berührt.

Auflösung. Der gesuchte Kreis X möge M von außen in Y und g in Z berühren; die vom Mittelpunkte M auf g gefällte Senkrechte MF schneide den Kreis M in A_1 und A_2. Dann liegen die Punkte X, Y und M auf einer Geraden und ebenso Z, Y und A_2. Folglich ist $\angle ZYA_1 = 1R$, also FA_1YZ ein Sehnenviereck und daher $A_2Y \cdot A_2Z = A_2A_1 \cdot A_2F$. Schneidet die Gerade A_2P den Kreis X in einem Punkte U, so ist auch $A_2Y \cdot A_2Z = A_2U \cdot A_2P$, folglich $A_2U \cdot A_2P = A_2A_1 \cdot A_2F$. U liegt daher auf dem durch P, A_1 und F gehenden Kreise. Hiermit ist die Aufgabe 5 auf die Aufgabe 2 zurückgeführt. Höchstens vier Lösungen. (Zwei der gesuchten Kreise berühren den festen von außen, die beiden anderen von innen.)

Aufgabe 6. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen festen Punkt P geht und zwei feste Kreise M_1 und M_2 berührt.

Auflösung. Der gesuchte Kreis X berühre die beiden festen Kreise M_1 und M_2 $(r_1 < r_2)$ in den Punkten Y_1 bez. Y_2 gleichartig (z. B. von außen). Dann geht nach § 52, Zus. 1, die Gerade Y_1Y_2 durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A der beiden festen Kreise. Bezeichnet man daher zwei nicht entsprechende Punkte der beiden festen Kreise auf dem durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 gehenden Ähnlichkeitsstrahle mit B_1 und B_2, so ist nach § 51 $AY_1 \cdot AY_2 = AB_1 \cdot AB_2$. Schneidet die Gerade AP den Kreis X in einem Punkte Z, so ist auch $AZ \cdot AP = AY_1 \cdot AY_2$ (oder gleich $AY_2 \cdot AY_1$), folglich $AZ \cdot AP = AB_1 \cdot AB_2$. Z liegt daher auf dem durch P, B_1 und B_2 gehenden Kreise. Hiermit ist die Aufgabe 6 auf die Aufgabe 3 zurückgeführt. Höchstens vier Lösungen. (Zwei der gesuchten Kreise berühren M_1 und M_2 gleichartig, die beiden anderen ungleichartig.)

Aufgabe 8. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei feste Gerade g_1 und g_2 und einen festen Kreis M berührt.

Auflösung. Der gesuchte Kreis ist einem anderen Kreise konzentrisch, welcher durch den Mittelpunkt M geht und zwei Parallelen zu g_1 und g_2 im Abstande r berührt. Hiermit ist die Aufgabe 8 auf die Aufgabe 4 zurückgeführt. Höchstens acht Lösungen.

Aufgabe 9. Einen Kreis zu zeichnen, der eine feste Gerade g und zwei feste Kreise M_1 und M_2 ($r_1 > r_2$) berührt.

Auflösung. Der gesuchte Kreis ist einem anderen Kreise konzentrisch, welcher durch den Mittelpunkt M_2 geht, eine Parallele zu g im Abstande r_2 und den mit $r_1 - r_2$ oder $r_1 + r_2$ um M_1 gezeichneten Kreis berührt. Hiermit ist die Aufgabe 9 auf die Aufgabe 5 zurückgeführt. Höchstens acht Lösungen.

Aufgabe 10. Einen Kreis zu zeichnen, der drei feste Kreise M_1, M_2, M_3, ($r_1 > r_2 > r_3$) berührt.

Auflösung. Der gesuchte Kreis ist einem anderen Kreise konzentrisch, der durch den Mittelpunkt M_3 geht und zwei Kreise um M_1 und M_2 mit den Radien $r_1 - r_3$ bez. $r_2 - r_3$, oder $r_1 + r_3$ bez. $r_2 + r_3$, oder $r_1 - r_3$ bez. $r_2 + r_3$, oder $r_1 + r_3$ bez. $r_2 - r_3$ berührt. Höchstens acht Lösungen. (Der gesuchte Kreis kann alle drei Kreise gleichartig berühren oder je zwei gleichartig und den dritten ungleichartig.)

Zweite Lösung.

Aufgabe 10. Einen Kreis zu zeichnen, der drei feste Kreise M_1, M_2, M_3 berührt.

Auflösung. [Siehe § 53.] Man konstruiere den Potenzmittelpunkt und die vier Ähnlichkeitsachsen der drei festen Kreise, konstruiere zu jeder dieser Ähnlichkeitsachsen den Pol in Bezug auf jeden der drei festen Kreise und lege durch den Potenzmittelpunkt und jeden dieser zwölf Pole die Gerade. Diese Geraden schneiden die zugehörigen Kreise in je zwei Punkten.

Verbindet man je sechs dieser Punkte, welche mit Hilfe einer bestimmten Ähnlichkeitsachse erhalten werden, mit den Mittelpunkten der Kreise, auf denen sie liegen, so gehen jedesmal drei der sechs Verbindungsgeraden durch einen Punkt, und dieser ist Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise.

Nimmt man z. B. die äußere Ähnlichkeitsachse, so erhält man die beiden Kreise, welche die drei festen Kreise gleichartig berühren. Nimmt man dagegen die innere Ähnlichkeitsachse $A_{12}J_{13}J_{23}$, so erhält man die beiden Kreise, welche M_1 und M_2 gleichartig und M_3 ungleichartig berühren u. s. w.

Diese Aufgabe 10 enthält die Aufgaben 1 bis 9 als besondere Fälle, wenn man die Gerade als Grenze betrachtet, welcher sich ein Kreis mit unbeschränkt zunehmendem Radius nähert, und den Punkt als Grenze, welcher sich ein Kreis mit unbeschränkt abnehmendem Radius nähert.

§ 55.

Übungen.

1. In Fig. 26 ist, wenn $M_1M_2 = c$,

$$AM_1 = c \cdot \frac{r_1}{r_2 - r_1}; \quad AM_2 = c \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1};$$

$$JM_1 = c \cdot \frac{r_1}{r_2 + r_1}; \quad JM_2 = c \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_1}.$$

2. In Fig. 27 sind die folgenden Vierecke Sehnenvierecke: a) $P_1Q_2Q_2'P_2'$. b) $P_1'Q_1'Q_2P_2$. c) $P_1Q_1'Q_2P_2'$. d) $P_1'Q_1Q_2'P_2$. e) $P_1P_2'T_2T_1$. f) $P_1'P_2T_2T_1$. [In jedem dieser Vierecke sind zwei gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel.]

3. In Fig. 28 schneiden einander in einem Punkte

a) $J_{12}M_3$, $J_{13}M_2$, $J_{23}M_1$. b) $J_{12}M_3$, $A_{13}M_2$, $A_{23}M_1$.
c) $J_{13}M_2$, $A_{23}M_1$, $A_{12}M_3$. d) $J_{23}M_1$, $A_{13}M_3$, $A_{13}M_2$.

[Lehrs. des Ceva, Dreieck $M_1M_2M_3$.]

4. Die vier Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen durch die Mittelpunkte der Kreise harmonisch geteilt werden.

5. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei feste Kreise gleichartig (ungleichartig) berührt und zwar den einen in einem festen Punkte. [§ 52, Zus. 1 und 2.]

6. Werden zwei Kreise durch einen dritten Kreis rechtwinklig geschnitten, so gehen die Verbindungsgeraden je zweier Schnittpunkte der beiden ersten Kreise durch den äußeren bez. inneren Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise.

7. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (ungleichartig) berührt, so geht die Polare des äußeren (inneren) Ähnlichkeitspunktes der beiden ersten Kreise in Bezug auf den einen dieser beiden Kreise durch den Pol des durch die Berührungspunkte gehenden äußeren (inneren) Ähnlichkeitsstrahles in Bezug auf diesen Kreis.

8. Die Potenzgerade zweier Kreise ist die Mittelparallele zu den Polaren eines jeden der beiden Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise in Bezug auf beide Kreise.

9. Der Abstand der Polaren der beiden Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise in Bezug auf den einen dieser beiden Kreise ist gleich dem Abstande der Polaren der beiden Ähnlichkeitspunkte in Bezug auf den anderen Kreis.

10. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Potenzgeraden zweier festen Kreise an jeden derselben eine Tangente, so geht die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte durch den einen der beiden Ähnlichkeitspunkte. [§ 46, 20 und § 52, Zus. 1 und 2.]

11. In jedem Dreieck sind der Durchschnittspunkt der Höhen und der der Seitenhalbierenden die Ähnlichkeitspunkte des umbeschriebenen und des Feuerbachschen Kreises.

12. Die Abstände des Durchschnittspunktes der Höhen eines beliebigen Dreiecks von beliebigen Punkten des umbeschriebenen Kreises werden durch den Feuerbachschen Kreis halbiert.

II. Trigonometrie.

A.*) Die trigonometrischen Funktionen der schiefen Winkel und die trigonometrische Berechnung der schiefwinkligen ungleichseitigen Dreiecke aus einfachen Stücken.

§ 56.

1. Ist $\angle$ BAC gleich α ein spitzer Winkel, und fällt man von einem beliebigen Punkte C des Schenkels AC auf den anderen Schenkel AB die Senkrechte CD, so nennt man nach Planim. § 155 und 156**) den Quotienten aus der Senkrechten CD und dem begrenzten Schenkel AC den Sinus des Winkels α, den Quotienten aus der Projektion AD des begrenzten Schenkels AC auf den Schenkel AB und dem begrenzten Schenkel AC den Kosinus des Winkels α, den Quotienten aus der Senkrechten CD und der Projektion AD die Tangente und den Quotienten aus AD und CD die Kotangente des Winkels α.

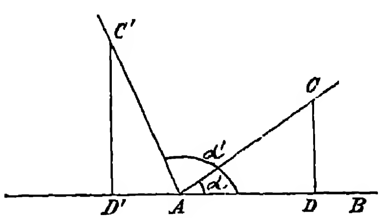

Fig. 29.

2. Ist $\angle$ BAC' gleich α' ein stumpfer Winkel, und fällt man von einem beliebigen Punkte C' des Schenkels AC' auf die Verlängerung des anderen Schenkels AB über den Scheitel A hinaus die Senkrechte C'D', so nennt man ebenfalls den Quotienten aus der Senkrechten C'D' und dem begrenzten Schenkel AC' den Sinus des Winkels α', den Quotienten aus der Projektion AD' des begrenzten Schenkels AC' auf die Verlängerung des Schenkels AB und dem begrenzten Schenkel AC' den Kosinus des Winkels α', den Quotienten aus C'D' und AD' die Tangente und den Quotienten aus AD' und C'D' die Kotangente des Winkels α'.

*) Lehraufgabe der Ober-Sekunda der Gymnasien.

**) Kambly, Planimetrie. Durchgesehene Ausgabe (100. Aufl.), Seite 142, 143 und 144.

Da die Projektion AD′ bei dem stumpfen Winkel BAC′ in Bezug auf den Scheitel A in entgegengesetzter Richtung liegt wie die Projektion AD beim spitzen Winkel BAC, so muß man, da AD positiv genommen ist, AD′ negativ nehmen. Die von C′ auf die Gerade AB gefällte Senkrechte C′D′ dagegen hat in Bezug auf AB gleiche Richtung mit der von C auf AB gefällten Senkrechten CD, daher ist C′D′ positiv zu nehmen, wie CD.

Folglich ist der Sinus eines **stumpfen** Winkels positiv, dagegen der Kosinus, die Tangente und die Kotangente negativ.

3. Da $\angle$ C′AD′ der Supplementwinkel von BAC′ ist, so folgt, daß der Sinus eines Winkels gleich dem Sinus seines Supplementwinkels, der Kosinus eines Winkels gleich dem Kosinus seines Supplementwinkels mit entgegengesetztem Vorzeichen, die Tangente eines Winkels gleich der Tangente seines Supplementwinkels mit entgegengesetztem Vorzeichen und die Kotangente eines Winkels gleich der Kotangente seines Supplementwinkels mit entgegengesetztem Vorzeichen ist. Oder:

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha);\quad \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^0 - \alpha);\quad \operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(180^0 - \alpha).$$

4. Zu dem gegebenen Sinus eines Winkels gehören zwei Winkel, ein spitzer und sein Supplementwinkel, zu dem gegebenen Kosinus, ebenso zu der gegebenen Tangente oder Kotangente gehört nur ein Winkel, und zwar ist dieser spitz oder stumpf, je nachdem die Funktion positiv oder negativ ist.

5. Übungen. 1a) $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$; wie groß $\sin 150^0$? b) $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; wie groß $\sin 135^0$? c) $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$; wie groß $\cos 120^0$? d) $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; wie groß $\cos 135^0$? e) $\operatorname{tg} 45^0 = 1$; wie groß $\operatorname{tg} 135^0$? f) $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$; wie groß $\operatorname{tg} 120^0$? g) $\operatorname{ctg} 45^0 = 1$; wie groß $\operatorname{ctg} 135^0$? h) $\operatorname{ctg} 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; wie groß $\operatorname{ctg} 120^0$?

2) Wie viele Winkel von 0^0 bis 180^0 genügen der Bedingung:

a) $\sin\varphi = \frac{3}{8}$? b) $\cos\varphi = 0{,}2$? c) $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5$? d) $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}25$?
e) $\sin\varphi = -\frac{1}{3}$? f) $\cos\varphi = -0{,}6$? g) $\operatorname{tg}\varphi = -0{,}2$? h) $\operatorname{ctg}\varphi = -2{,}75$?
i) $\sin\varphi = 1{,}5$? k) $\sin\varphi = -1{,}25$? l) $\cos\varphi = 2{,}5$? m) $\cos\varphi = -1{,}125$?

3) Durch Funktionen eines spitzen Winkels auszudrücken:

a) $\sin 125^0$. b) $\cos 175^0$.
c) $\operatorname{tg} 98^0$. d) $\operatorname{ctg} 100^0$.
e) $\sin 114^0\ 16'\ 39''$. f) $\cos 167^0\ 25'\ 4''$.
g) $\operatorname{tg} 118^0\ 7'\ 17''$. h) $\operatorname{ctg} 116^0\ 7'\ 19''$.

§ 57.

Lehrsatz. (Der Sinussatz.) In jedem Dreiecke verhalten sich je zwei Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Behauptung. $\mathbf{a : b = sin}\ \alpha : \mathbf{sin}\ \beta$,

$\mathbf{b : c = sin}\ \beta : \mathbf{sin}\ \gamma$,

$\mathbf{c : a = sin}\ \gamma : \mathbf{sin}\ \alpha$ oder

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin}\ \alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sin}\ \beta} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sin}\ \gamma}.$$

Beweis 1. In Fig. 30a, in welcher alle Winkel spitz sind, ist

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \text{ und } \sin\beta = \frac{h_c}{a} \text{ oder}$$

$$h_c = b \sin\alpha \text{ und } h_c = a \sin\beta; \text{ folglich}$$

$$b \sin\alpha = a \sin\beta \text{ oder}$$

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

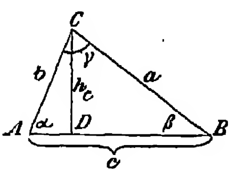

Fig. 30a.

Zerlegt man das Dreieck ABC durch die zur Seite BC gehörige Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke, so ergiebt sich

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Ebenso erhält man

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma.$$

Dasselbe ergiebt sich aus Fig. 30b, in welcher $\alpha > 90^0$; denn es ist

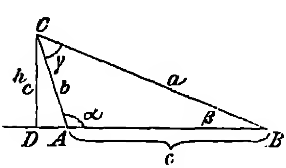

Fig. 30b.

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{h_c}{b} \text{ und}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \text{ oder}$$

$$h_c = b \sin\alpha \text{ und } h_c = a \sin\beta; \text{ folglich}$$

$$b \sin\alpha = a \sin\beta \text{ oder}$$

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \text{ u. s. w.}$$

Beweis. 2. Man beschreibe um das Dreieck ABC den Kreis, dessen Mittelpunkt mit M, und dessen Halbmesser mit r bezeichnet werden möge, ziehe von einer beliebigen Ecke, z. B. B, aus den Durchmesser, BC′, und verbinde C′ mit A, dann ist

$$\angle BAC' = 90^0$$

als Winkel im Halbkreise.

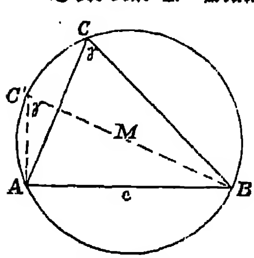

Fig. 31a.

Ist nun [Fig. 31a] $\angle ACB = \gamma < 90^0$, so ist $\angle AC'B = ACB = \gamma$, als Umfangswinkel über demselben Bogen AB, folglich ist

$$\frac{BA}{BC'} = \sin\gamma;\ \frac{c}{2r} = \sin\gamma;\ c = 2r\sin\gamma.$$

Ist dagegen [Fig. 31b] $\angle$ ACB $= \gamma > 90^0$, so sind $\angle$ AC'B und ACB Supplementwinkel, als Umfangswinkel, deren Bogen sich zum Kreise ergänzen, folglich ist

$$\frac{AB}{BC'} = \sin(180^0 - \gamma) = \sin\gamma;$$

$$\frac{c}{2r} = \sin\gamma;\quad c = 2r\sin\gamma.$$

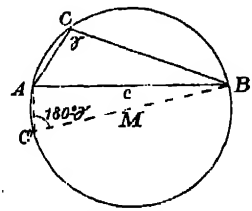

Fig. 31b.

Ebenso ergiebt sich $a = 2r\sin\alpha$ und
$b = 2r\sin\beta$;

folglich ist

$$a : b = (2r\sin\alpha) : (2r\sin\beta) \quad \text{oder}$$
$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \text{ u. s. w.}$$

Beweis 3. In Fig. 32a und 32b sei M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und DM die Mittelsenkrechte der Seite AB.

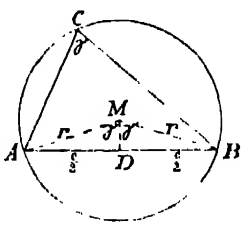

Fig. 32a.

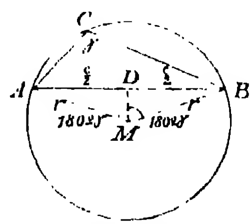

Fig. 32b.

Ist nun [Fig. 32a] $\angle$ ACB $= \gamma < 90^0$, so ist der hohle Mittelpunktswinkel AMB $= 2\gamma$, also $\angle$AMD $= \gamma$ und $\frac{\frac{1}{2}c}{r} = \sin\gamma$, $\frac{c}{2r} = \sin\gamma$, $c = 2r\sin\gamma$.

Ist dagegen [Fig. 32b] $\angle$ ACB $= \gamma > 90^0$, so ist der erhabene Mittelpunktswinkel AMB $= 2\gamma$, also der hohle Mittelpunktswinkel AMB $= 360^0 - 2\gamma$, $\angle$ AMD $= 180^0 - \gamma$, $\frac{\frac{1}{2}c}{r} = \sin(180^0 - \gamma) = \sin\gamma$, $c = 2r\sin\gamma$ u. s. f.

§ 58.

Anwendung des Sinussatzes zur Berechnung von Dreiecken.

1. Sind von einem Dreiecke eine Seite und zwei Winkel gegeben, z. B. c, α, β, so ist

$$1)\ \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Ferner ergiebt sich aus

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$2) \quad a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

und aus

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$3) \quad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Mit Hilfe des **Sinussatzes** löst man also die Aufgabe, **ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln zu berechnen.**

2. Sind von einem Dreiecke zwei Seiten und der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel gegeben, z. B. a, b (a > b), α, so ergiebt sich aus

$$\sin \beta : \sin \alpha = b : a$$

$$1) \quad \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Dann berechnet man γ aus

$$2) \quad \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Endlich findet man aus

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$$

$$3) \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Gleichung 1) ist immer lösbar, da $b < a$ und $\sin \alpha < 1$, also $b \sin \alpha < a$ und $\frac{b \sin \alpha}{a} < 1$. Von den beiden Winkeln, welche man aus dieser Gleichung nach § 56, 4 für β erhält, genügt nur der spitze Winkel, da $b < a$, also $\beta < 90^0$ sein muß.

Mit Hilfe des **Sinussatzes** löst man also auch die Aufgabe, **ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.**

Man erhält für jede der gesuchten Größen nur einen Wert.

3. Sind von einem Dreiecke zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel gegeben, z. B. a, b (a > b), β, so ergiebt sich aus

$$\sin \alpha : \sin \beta = a : b$$

$$1) \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}.$$

Dann findet man γ aus

$$2)\ \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

und c aus

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta$$

$$3)\ c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Da $a > b$ und $\sin\beta < 1$, so kann $a \sin\beta \gtreqless b$, also $\frac{a \sin\beta}{b} \gtreqless 1$ sein.

Ist $\frac{a \sin\beta}{b} > 1$, so erhält man aus Gleichung 1) für α keinen Wert, die Aufgabe ist unlösbar; ist $\frac{a \sin\beta}{b} = 1$, so erhält man $\alpha = 90^0$; ist $\frac{a \sin\beta}{b} < 1$, so erhält man für α zwei Werte, einen spitzen Winkel und seinen Supplementwinkel.

Mit Hilfe des Sinussatzes löst man also auch die Aufgabe, **ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.**

Man erhält für α und damit auch für γ und c keinen, einen oder zwei Werte, je nachdem $\frac{a \sin\beta}{b} > 1$ oder $\frac{a \sin\beta}{b} = 1$ oder $\frac{a \sin\beta}{b} < 1$ ist.

4. Übungen. Ein Dreieck zu berechnen aus

1) c, α, β. (731,85; $76^0\ 43'\ 20''$; $48^0\ 52'\ 33''$).
2) c, α, γ. (1064,27; $60^0\ 45'\ 50''$; $68^0\ 22'\ 23''$).
3) a, b, α. (1204,59; 961,3; $75^0\ 45'\ 20''$).
4) a, b, β. a) (939,96; 507,64; $30^0\ 40'\ 30''$).
b) (910; 882; $75^0\ 45'$).
c) (40,75; 12,5; $20^0\ 30'\ 20''$).
5) a, h_c, α. (15; 12; $67^0\ 22'\ 49''$).
(15; 12; $112^0\ 37'\ 12''$).

[Aus h_c und α findet man zunächst aus einem rechtwinkligen Dreiecke b; dann kennt man a, b, α, kann also die übrigen Stücke mit Hilfe des Sinussatzes berechnen.]

6) a, b, h_c. (20; 13; 12). (109; 61; 60).

7) c, h_a, h_b. (21; 12,6; 19,3846). (11; 6,6; 10,1538).

8) h_a, h_b, α. (25,76; 66,2759; $46^0\ 23'\ 50''$). (64,3771; 125,664; $20^0\ 36'\ 35''$).

9) Welche Aufgaben kann man mit dem Sinussatze lösen, wenn man in der Formel für denselben als unbekannt auffaßt a) das letzte Glied? b) das vorletzte? c) das zweite? d) das erste?

§ 59.

Lehrsatz. (Der Kosinussatz.) In jedem Dreiecke ist das Quadrat jeder Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Behauptung. $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

oder $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a^2 + b^2 - c^2}}{\mathbf{2ab}}$.

Beweis. In Fig. 33a ist

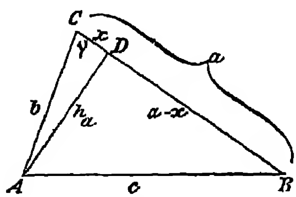

Fig. 33a.

$$1)\ x = b\cos\gamma$$
$$2)\ h_a^2 = b^2 - x^2$$
$$3)\ c^2 = h_a^2 + (a-x)^2.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man durch Elimination von x

$$1')\ h_a^2 = b^2 - b^2\cos^2\gamma$$
$$2')\ c^2 = h_a^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$

und aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von h_a

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \text{ oder} \\ \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned}$$

In Fig. 33b ist

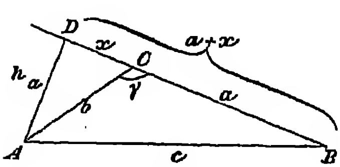

Fig. 33b.

$$1)\ x = b\cos(180^0 - \gamma) = -b\cos\gamma$$
$$2)\ h_a^2 = b^2 - x^2$$
$$3)\ c^2 = h_a^2 + (a+x)^2$$
$$1')\ h_a^2 = b^2 - b^2\cos^2\gamma$$
$$2')\ c^2 = h_a^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \text{ oder} \\ \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned}$$

Vergleiche § 1, 1a und b.

§ 60.

Anwendung des Kosinussatzes zur Berechnung von Dreiecken.

1. Sind von einem Dreiecke zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, z. B. a, b, γ, so ergiebt sich für c mit Hilfe des Kosinussatzes

$$1)\quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma}.$$

Dann findet man vermittelst des Sinussatzes für den kleineren der beiden nicht gegebenen Winkel β (wenn $a > b$)

$$\sin\beta : \sin\gamma = b : c,$$

$$2)\quad \sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$$

und schließlich

$$3)\qquad \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma).$$

Mit Hilfe des **Kosinussatzes** und des Sinussatzes löst man also die Aufgabe, **ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen.**

2. Sind von einem Dreiecke die drei Seiten gegeben, so ist nach dem Kosinussatze

$$1)\quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Einen der beiden übrigen Winkel, z. B. β, kann man entweder ebenfalls vermittelst des Kosinussatzes berechnen, denn es ist

$$2_1)\quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

oder nach dem Sinussatze, nach welchem

$$2_2)\quad \sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}.$$

Den dritten Winkel α findet man aus

$$3)\qquad \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma).$$

Mit Hilfe des **Kosinussatzes** oder des Kosinussatzes und des Sinussatzes löst man also die Aufgabe, **ein Dreieck aus den drei Seiten zu berechnen.**

3. Übungen. Ein Dreieck zu berechnen aus

1) a, b, γ. a) (963; 369; $90^0\ 37'\ 13''$).
b) (555; 385; $61^0\ 8'\ 36''$).

c) (102,5; 42,5; 74⁰ 36′ 32″).
d) (890; 864; 26⁰ 18′ 40″).

2) a, b, c. a) (12; 5; 10). b) (115; 100; 85).
c) (63; 60; 87). d) (72; 65; 97).
e) 14,24; 6,4; 13,824). f) (10,272; 3,936; 11,04).

3) c, h_c, α. (11; 11,1785; 68⁰ 40′ 35″).

4) c, h_c, b. (14; 12; 13).

5) h_a, h_b, γ. (83,876; 112,22; 35⁰ 20′ 29″).

6) a, b, h_a. (15; 13; 11,1997).

7) a, h_a, h_b. (15; 11,1997; 12,923).

8) a, c, s_c. (12; 20; 8).

9) a, u, w_γ. (543; 444; 388,622).

10) Welche Aufgaben kann man mit dem Kosinussatze lösen, wenn man in der Formel für denselben der Reihe nach jede der vier Größen a, b, c, γ als unbekannt auffaßt?

§ 61.*)

Hilfssatz. Ist γ ein beliebiger spitzer oder stumpfer Winkel, so ist

$$1.\quad \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$2.\quad \cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$3.\quad \cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1.$$

Beweis. Trägt man auf den Schenkeln des Winkels γ von seinem Scheitel C aus gleiche Stücke ab bis A und B und verbindet A mit B, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ACB. Fällt man von C auf AB die Senkrechte CD und von A auf BC die Senkrechte AE, so ist $\triangle BAE \backsim BCD$, also $\angle BAE = BCD = \frac{\gamma}{2}$. Folglich ist

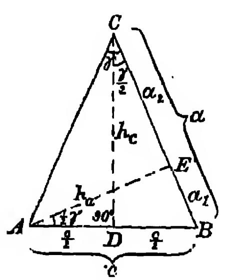

Fig. 34a.

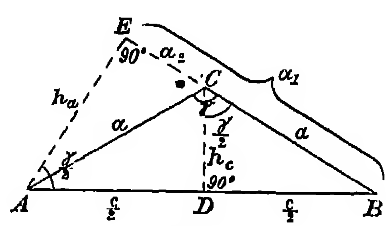

Fig. 34b.

$$\sin\gamma = \frac{h_a}{a} \qquad\qquad \sin\gamma = \sin(180^0 - \gamma) = \frac{h_a}{a},$$

*) § 61 und § 62 können zunächst übergangen werden; es genügt § 62, Anm. 1.

$$h_a = c \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$\frac{c}{2} = a \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{c}{a} = 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

1) $$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Ferner ist

$$\cos \gamma = \frac{a_2}{a} = \frac{a - a_1}{a} = 1 - \frac{a_1}{a};$$

$$a_1 = c \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$c = 2a \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$a_1 = 2a \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{a_1}{a} = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

2) $$\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

$$h_a = c \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$\frac{c}{2} = a \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{c}{a} = 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

1) $$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$\cos \gamma = -\cos(180^0 - \gamma) = -\frac{a_2}{a} = -\frac{a_1 - a}{a} = 1 - \frac{a_1}{a};$$

$$a_1 = c \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$c = 2a \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$a_1 = 2a \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{a_1}{a} = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

2) $$\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Da γ ein beliebiger spitzer oder stumpfer Winkel ist, so ist sein Supplementwinkel γ' ein stumpfer oder spitzer Winkel; für diesen ist daher nach 2)

$$\cos \gamma' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma'}{2}.$$

Nun ist $\gamma' = 180^0 - \gamma$, $\quad \frac{\gamma'}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$,

$$\cos \gamma' = -\cos \gamma, \qquad \sin \frac{\gamma'}{2} = \cos \frac{\gamma}{2},$$

folglich ist

$$-\cos \gamma = 1 - 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \text{ oder}$$

3) $$\cos \gamma = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1.$$

§ 62.

Mit Hilfe der Formeln 2) und 3) des vorigen Paragraphen können die Formeln des § 59

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

und $$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

wenn a, b und c größere Zahlen sind, in eine für logarithmische Berechnung geeignetere Form gebracht werden.

1. Setzt man in die erste Formel für $\cos\gamma$ ein

$2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$ bez. $1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$, so erhält man

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= a^2 + b^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2} + 2ab \qquad = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}, \qquad = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$1)\quad c = (a+b)\sqrt{1 - \frac{4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}}.\ ^{*)} \qquad 1')\quad c = (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}}.\ ^{*)}$$

2. Setzt man in die zweite der oben stehenden Formeln für $\cos\gamma$ ein $2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$ bez. $1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$, so erhält man

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \qquad 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \qquad 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} \qquad = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab) - c^2}{2ab} \qquad = \frac{c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)}{2ab}$$

---

*) Weitere Umformungen § 100, 15.

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} \qquad\qquad = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}, \qquad\qquad = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab},$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}, \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{4ab}.$$

Setzt man $a + b + c = 2s$,
dann ist
$$-a + b + c = 2s - 2a = 2(s-a),$$
$$a - b + c = 2s - 2b = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2s - 2c = 2(s-c),$$
folglich

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{2s\,2(s-c)}{4ab} \qquad\qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{2(s-a)\,2(s-b)}{4ab}$$

$$= \frac{s(s-c)}{ab}, \qquad\qquad = \frac{(s-a)(s-b)}{ab},$$

$$2)\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \qquad 2')\ \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Entsprechend

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}. \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}.$$

3. Die für logarithmische Rechnung geeignetste Form ergiebt sich, wenn man die Formeln 2′) durch die entsprechenden Formeln 2) dividiert:

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

4. Anmerkung 1. Diese letzten Formeln ergeben sich auch auf folgende Weise:

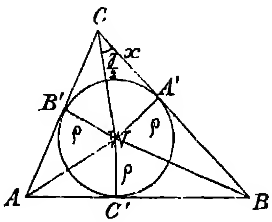

Fig. 35.

Aus Figur 35, in welcher W der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist, erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{x}.$$

Nach § 10 ist

$$\varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

und

$$x = s - c,$$

folglich ist

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

5. Anmerkung 2. Da nach § 61, 1

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ so ist}$$

$$\sin\gamma = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nach § 56, 4 erhält man aus dieser Formel für γ zwei Werte, während die Formeln 2), 2′) und 3) eindeutig sind.

6. Übungen. Ein Dreieck zu berechnen aus

1) a, b, γ. a) (8765,4; 7654,3; 73° 36′ 14″).
b) (817,5; 457,5; 66° 59′ 28″).
c) (122220; 91350; 48° 48′).

2) a, b, c. a) (96096; 20097; 98175).
b) (1968,75; 675; 2081,25).
c) (2531,25; 1575; 2981,25).
d) (987; 978; 982,54).

3) Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten sich verhalten wie a) 2 : 3 : 4? b) 3 : 4 : 5?

4) Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks, wenn $a : u : w_\gamma = 89 : 39 : 80$?

5) Ein Dreieck zu berechnen aus

a) a, c, s_c. (12; 20; 8). b) a, u, w_γ. (543; 444; 388,622).

§ 63.

Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, und es soll einer der beiden anderen Winkel berechnet werden, so muß man nach dem Kosinussatze [§ 60, 1] erst die dritte Seite berechnen und findet dann den gesuchten Winkel nach dem Sinussatze.

Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nur den einen der beiden anderen Winkel berechnen, nicht aber die dritte Seite, so erreicht man dies mit Hilfe der folgenden beiden Sätze.

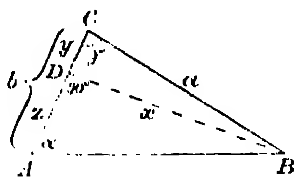

Fig. 36a.

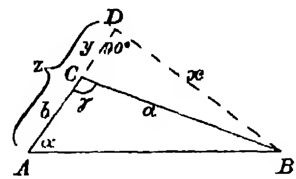

Fig. 36b.

1. In dem Dreieck ABC [Fig. 36] seien a, b und γ bekannt; α soll berechnet werden.

Man fällt von B auf AC die Senkrechte BD.

Ist dann [Fig. 36a] $\gamma < 90^0$, so ist

$$x = a \sin\gamma, \quad y = a \cos\gamma, \quad z = b - y = b - a\cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{z} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

Ist dagegen [Fig. 36b] $\gamma > 90^0$, so ist

$$x = a\sin(180^0 - \gamma) = a\sin\gamma, \quad y = a\cos(180^0 - \gamma) = -a\cos\gamma,$$
$$z = b + y = b - a\cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{z} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

Ist also $\gamma \gtrless 90^0$, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} \text{ und entsprechend } \operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}.$$

[**Separierter Tangentensatz.**]

Diese Formeln gelten auch für $\gamma = 90^0$, da dann $\sin\gamma = 1$, $\cos\gamma = 0$; in diesem Falle gehen die beiden Formeln über in $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

2. Der Tangentensatz. In jedem Dreieck verhält sich die Summe irgend zweier Seiten zu der Differenz dieser beiden Seiten, wie die Tangente der halben Summe der diesen beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

Behauptung.

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

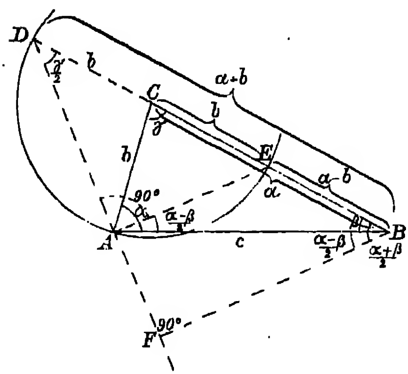

Fig. 37.

Beweis. Stellt man sich die Summe und die Differenz der beiden Seiten BC = a und AC = b (a > b) dar, indem man um C mit CA den Kreis schlägt, der die Verlängerung von CB in D und CB selbst in E schneidet, so daß BD = a + b und BE = a — b, und verbindet D und E mit A, dann ist $\angle$ DAE = 90° als Winkel im Halbkreise; zieht man daher durch B zu AE die Parallele BF, so ist auch $\angle$ BFD = 90°. Ferner ist $\angle$ CDA $= \frac{\gamma}{2}$ als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ACD, dessen Außenwinkel an der Spitze ACB = γ ist; folglich ist der andere spitze Winkel des rechtwinkligen Dreiecks BFD $\angle$ DBF $= \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\angle$ ABF $= \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Es ist daher

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{DF}{BF}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{AF}{BF};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{DF}{BF} : \frac{AF}{BF}\\ &= DF : AF\\ &= DB : EB, \text{ da } BF \parallel EA,\\ &= (a+b):(a-b).\end{aligned}$$

Löst man diese Formel nach $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b} = \frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Kennt man daher a, b und γ, so berechnet man aus dieser Formel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und findet dann α und β aus $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Die dritte Seite c kann man hierauf nach dem Sinussatze, nach welchem $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$, berechnen.

§ 64.

Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, und es soll die dritte Seite berechnet werden (entweder nur die dritte Seite oder auch die beiden anderen Winkel), so wendet man auch die **Mollweideschen** Formeln oder den **Gaußischen** Doppelsatz an:

$$(a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ (a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Beweis 1. In Figur 37 ist $\angle BAE = ABF = \frac{\alpha-\beta}{2}$, da $BF \parallel AE$, $\angle BAD = 90^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\angle CEA = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ACE, dessen Winkel an der Spitze gleich γ ist, $\angle AEB = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$; folglich ist

$$(a+b) : c = \sin\left(90^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$(a+b) : c = \sin\left(90^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$(a+b) : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$(1)\quad (a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ferner ist $(a-b) : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right)$,

$$(a-b) : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$(a - b) : c = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$(2) \quad (a - b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Division

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cos \frac{\gamma}{2}}{(a + b) \sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ (vergl. § 63, 2),}$$

woraus $\frac{\alpha - \beta}{2}$ berechnet wird, und dann findet man c aus

$$c = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad \text{oder aus} \quad c = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Die Zähler der beiden Brüche für c sind gleich dem Nenner bez. Zähler in dem Ausdrucke für $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$, sind also schon ausgerechnet. Deshalb kann man c leicht doppelt ausrechnen, und man hat in dieser doppelten Berechnung von c eine Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Rechnung.

Beweis 2. In dem Dreieck ABC sei CD die Halbierungsgerade des Winkels ACB $= \gamma$, ferner sei BE $\perp$ CD, AF $\perp$ CD, AG $\parallel$ CD; dann ist

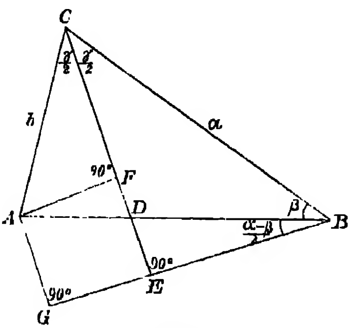

Fig. 38.

$$\angle \text{DBE} = 90^0 - \frac{\gamma}{2} - \beta$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Da nun

$$\text{BE} + \text{AF} = \text{BG}$$

und

$$\text{CE} - \text{CF} = \text{AG},$$

so ist

$$a \sin \frac{\gamma}{2} + b \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ und}$$

$$a \cos \frac{\gamma}{2} - b \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$(a + b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ und}$$

$$(a - b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Übungen. 1) Mit Hilfe der Formeln in § 63 und 64 die Aufgaben § 60 Übungen 1) zu lösen.

2) Gegeben $a : b, \gamma$; gesucht α und β. ($3 : 2$; $75^0\ 29'\ 56''$). [Aus $a : b = m : n$ folgt $(a + b) : (a - b) = (m + n) : (m - n)$.]

3) Gegeben $a : b$, $\alpha - \beta$; gesucht α, β und γ. ($4 : 3$; $16^0\ 15'\ 36''$).

4) Gegeben $h_a : h_b, \gamma$; gesucht α und β. ($3 : 5$; $79^0\ 15'\ 6''$).

5) Gegeben $h_a : h_b$, $\alpha - \beta$; gesucht α, β und γ. ($5 : 12$; $44^0\ 45'\ 36''$).

6) Gegeben $u : v$, γ; gesucht α und β. ($5 : 2$; $110^0\ 31'\ 38''$).

7) Gegeben $u : v$, $\alpha - \beta$; gesucht α, β und γ. ($45 : 28$; $26^0\ 13'\ 8''$).

8) Welche Aufgaben kann man mit Hilfe des Tangentensatzes lösen, wenn man in der Formel für denselben als unbekannt auffaßt a) das letzte Glied? b) das vorletzte? c) das zweite? d) das erste?

9) Welche Aufgaben kann man mit den Mollweideschen Formeln (§ 64) lösen, wenn man diese in Proportionen umformt und dann als unbekannt auffaßt a) das letzte Glied? b) das vorletzte? c) das zweite? d) das erste?

§ 65.

Berechnung des Flächeninhaltes der Dreiecke.

1. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, a, b, γ.

Es ist $\qquad F = \frac{1}{2}gh.$

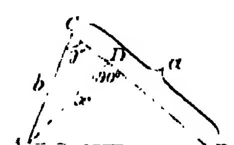

Fig. 39a.

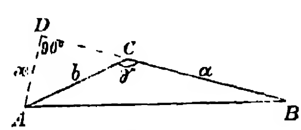

Fig. 39b.

Nimmt man daher die eine der beiden gegebenen Seiten, z. B. a, als Grundseite und bezeichnet die zugehörige Höhe mit x, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}ax.$$

Nun ist aber $\qquad x = b\sin\gamma,$

folglich ist $\qquad \mathbf{F = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma.}$

Ebenso ergiebt sich $\qquad F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ und $F = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Auf diesen Satz geht man in allen übrigen Fällen zurück, indem man aus den gegebenen Stücken zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel berechnet.

2. Gegeben eine Seite und die Winkel, c, α, β, γ.

Nach 1) ist $$F = \tfrac{1}{2} cb \sin\alpha.$$

In dem Ausdrucke für F ist b unbekannt; da man aber c, α, β, γ kennt, so kann man b nach § 58, 1 berechnen. Man erhält

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}; \quad \text{folglich ist}$$

$$F = \tfrac{1}{2} c \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} \sin\alpha,$$

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}.$$

Entsprechend: $F = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$ und $F = \frac{b^2 \sin\gamma \sin\alpha}{2 \sin\beta}$.

3. Gegeben zwei Seiten und der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel, a, b (a > b), α.

Nach 1) ist $$F = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

In diesem Ausdrucke für F ist γ unbekannt. Nach § 58, 2 kann man aber γ aus a, b, α berechnen, indem man zunächst aus

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \quad \text{oder} \quad \sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

β berechnet und dann γ aus

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

4. Gegeben zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel, a, b, (a > b), β.

Nach 1) ist $$F = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Den unbekannten Winkel γ findet man aus a, b, β, indem man zunächst aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ oder $\sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b}$ den Winkel α berechnet und dann γ aus $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Man erhält nach § 58, 3 für α und damit auch für γ und für F keinen, einen oder zwei Werte, je nachdem

$$\frac{a \sin\beta}{b} > 1 \text{ oder } \frac{a \sin\beta}{b} = 1 \text{ oder } \frac{a \sin\beta}{b} < 1 \text{ ist.}$$

5. Gegeben die drei Seiten, a, b, c.

Aus $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

und $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [§ 62, Anm. 2]

ergiebt sich die schon aus der Planimetrie bekannte Formel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

6. Übungen. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen aus

1) a, b, γ. a) (99,126; 33,33; 37° 15′ 12″).
b) (57,565; 45,75; 130° 39′ 10″).

2) c, α, β. a) (32,569; 67° 56′ 30″; 56° 45′ 15″).
b) (19,5373; 46° 35′ 40″; 40° 24′ 20″).

3) a, b, α. a) (94; 42; 129° 58′ 39″).
b) (19,825; 6,6662; 127° 12′ 53″).

4) a, b, β. a) (32,1; 12,3; 11° 20′ 16″).
b) (97,5; 57,9; 25° 4′ 57″).
c) (178,76; 44,003; 14° 15′).
d) (17,4; 12; 43° 36′ 10″).
e) (54,32; 23,45; 35° 45′ 30″).
f) (39,5; 12,75; 20° 45′ 15″).

5) a, b, c. a) (71,06; 40,8; 81,94).
b) (41,6; 21; 46,6).
c) (10; 17; 21).

§ 66.

Einige andere schon aus der Planimetrie bekannte Formeln für F erhält man auf folgende Weise.

1. Aus $2r \sin\gamma = c$ § 57, 2
und $ab \sin\gamma = 2F$ § 65, 1

folgt $$\frac{2r}{ab} = \frac{c}{2F},$$

$$r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$F = \frac{abc}{4r}. \quad \text{Vergl. § 9.}$$

2. Ist W der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises und A′ der Berührungspunkt dieses Kreises mit der Seite BC = a, so ist $WA' = \varrho$, $\angle WCA' = \frac{1}{2}\gamma$ und $CA' = s - c$ (Planim. § 101, 222); folglich ist

$$\frac{\varrho}{s-c} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho = (s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Nach § 62, 3 ist $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

folglich ist $$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$= \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\varrho = \frac{F}{s}.$$

Entsprechend ergiebt sich

$$\varrho_c = \frac{1}{s-c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c},$$

$$\varrho_a = \frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\varrho_a = \frac{F}{s-a},$$

$$\varrho_b = \frac{1}{s-b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\varrho_b = \frac{F}{s-b}.$$

Also $F = \varrho s = \varrho_c(s-c) = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b)$.

§ 67.

Berechnung des Sehnenvierecks.

1. Wenn der Radius des dem Sehnenviereck ABCD umbeschriebenen Kreises mit r bezeichnet wird, die der Seite a gegenüberliegenden Umfangswinkel ACB und ADB mit α', die der Seite b gegenüberliegenden Umfangswinkel BDC und BAC mit β' u. s. w., dann ist nach § 57, 2 $a = 2r \sin\alpha'$, $b = 2r \sin\beta'$, $c = 2r \sin\gamma'$, $d = 2r \sin\delta'$, $e = 2r \sin\beta$, $f = 2r \sin\alpha$, folglich ist

$$\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{b}{\sin\beta'} = \frac{c}{\sin\gamma'} = \frac{d}{\sin\delta'} = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{f}{\sin\alpha}.$$

(Der Sinussatz des Sehnenvierecks.)

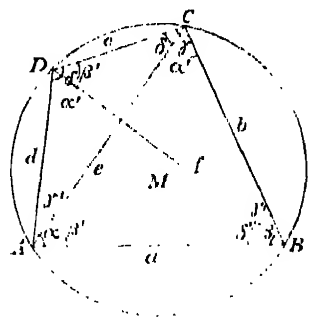

Fig. 40.

2. Da $\alpha + \gamma = 180^0$, also $\cos\gamma = -\cos\alpha$ ist, so ist nach § 59

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \quad \text{und}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen f^2, so ergiebt sich

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$ (Der Kosinussatz des Sehnenvierecks.)

Diese Formel kann man wie in § 62 umformen, indem man für $\cos\alpha$ entweder $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ oder $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ und $a + b + c + d = 2s$ setzt. Man erhält dann

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$$

folglich ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}} \quad \text{und}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Für den Flächeninhalt erhält man [vergl. § 13, 2]

$$F = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Eliminiert man aus den beiden oben für f^2 erhaltenen Gleichungen $\cos\alpha$, so ergiebt sich der in § 13, 1 gefundene Ausdruck

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \text{ und entsprechend } e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Aus $f = 2r\sin\alpha$ und dem für $\sin\alpha$ gefundenen Ausdruck folgt

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

§ 68.

Übungen.

1. Ein Dreieck zu berechnen aus

a) $a:b,\ \alpha,\ c.$ $(60:11;\ 79^0\ 36'\ 40'';\ 61)$.
b) $a:b,\ \alpha,\ h_c.$ $(24:7;\ 73^0\ 44'\ 23'';\ 6{,}72)$.
c) $u:v,\ h_c,\ \alpha.$ $(116:89;\ 400;\ 64^0\ 39'')$.
d) $u,\ v,\ \alpha.$ $(15;\ 13;\ 67^0\ 22'\ 49'')$.
e) $h_c,\ \alpha,\ \beta.$ $(12;\ 67^0\ 22'\ 48'';\ 36^0\ 52'\ 12')$.
f) $h_c:a,\ b,\ h_a.$ $(4:5;\ 130;\ 112)$.
g) $a+b,\ h_c,\ \alpha.$ $(165;\ 60;\ 67^0\ 22'\ 47'')$.
h) $a-b,\ h_c,\ p.$ $(175;\ 300;\ 400)$.
i) $u,\ \alpha,\ \beta.$ $(756{,}68;\ 64^0\ 39'';\ 34^0\ 42'\ 29'')$.
k) $a,\ u,\ \gamma.$ $(20;\ 12{,}7273;\ 75^0\ 45')$.
l) $c,\ r,\ \alpha.$ $(615;\ 322{,}625;\ 64^0\ 39'')$. [§ 57, 2.]
m) $c,\ r,\ \alpha-\beta.$ $(56;\ 32{,}5;\ 14^0\ 15'\ 1'')$.
n) $c,\ r,\ h_a.$ $(84;\ 48{,}75;\ 67{,}2)$.
o) $a+b,\ r,\ \alpha.$ $(112;\ 32{,}5;\ 67^0\ 22'\ 49'')$.
p) $a-b,\ r,\ \alpha.$ $(21;\ 32{,}5;\ 36^0\ 52'\ 12'')$.
q) $h_c,\ w_\gamma,\ \gamma.$ $(600;\ 652{,}33;\ 66^0\ 59'\ 25'')$. [$\angle(h_c w_\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.]
r) $h_c,\ w_\gamma,\ b.$ $(12;\ 12{,}4383;\ 13)$.

2. Von der Ecke C eines Dreiecks ABC ist nach der Seite AB eine Gerade CD gezogen, welche den Winkel ACB im Verhältnisse 3 : 2 teilt ($\angle ACD : BCD = 3:2$). Wie groß ist CD, wenn

a) $a = b = c = 50$? b) $a = b = 988{,}48;\ \alpha = 54^0\ 24'\ 15''$?
c) $AD = 25{,}126$ cm; $\alpha = 56^0\ 47'\ 56''$; $\beta = 45^0\ 55'\ 58''$?
d) $AD = 250$ cm; $b = 118{,}335$; $\gamma = 167^0\ 14'\ 10''$?
e) $a = 95{,}176$; $\alpha = 120^0\ 36'\ 40''$; $\beta = 35^0\ 25'\ 15''$?
f) $c = 74{,}823$; $\alpha = 85^0\ 54'$; $\beta = 45^0\ 20'\ 30''$?

3. Wie groß sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn

a) $a = b = c$; $CD = 859{,}48$ cm?
b) $a = b$; $CD = 98{,}73$ cm; $\alpha = 80^0\ 40'\ 37{,}5''$?
c) $CD = 85{,}428$ m; $\alpha = 59^0\ 59'\ 21''$; $\beta = 59^0\ 11''$?
d) $CD = 22{,}284$ m; $\alpha = 38^0\ 12'\ 47''$; $\beta = 21^0\ 47'\ 18''$?
e) $AD = 396$ cm; $CD = 339{,}93$ cm; $\gamma = 110^0$?

4. Die übrigen Stücke eines Parallelogramms zu berechnen aus

a) a, α, $\angle$ (af). (946,65; $100^0\ 20'\ 30''$; $51^0\ 54'\ 24''$).
b) a, α, $\angle$ (ae). (428,4; $54^0\ 14'\ 40''$; $30^0\ 30'$).
c) e, α, $\angle$ (ae). (166,33; $54^0\ 29'\ 45''$; $25^0\ 30'\ 45''$).
d) f, $\angle$ (af), $\angle$ (bf). (79,345; $59^0\ 8'$; $70^0\ 56'\ 15''$).
e) a, e, α. (236,67; 500; $79^0\ 39'\ 30''$).
f) a, f, ε; gesucht e. (225; 261,854; $82^0\ 51'$).
g) a, e, ε; gesucht f. (47,838; 200; $27^0\ 45'\ 8''$).

5. Die übrigen Stücke eines Trapezes zu berechnen aus

a) a, c, α, β. (1000; 181,6; $75^0\ 44'\ 20''$; $50^0\ 47'$).
b) a, b, c, α. (1234; 999; 538; $77^0\ 9'$).
c) a, b, d, β. (992,725; 889; 988; $63^0\ 55'\ 10''$).
d) a, α, β, $\angle$ (ae). (256,5; $48^0\ 20'\ 38''$; $45^0\ 45'\ 20''$; $20^0\ 59'\ 20''$).

6. Ein Dreieck zu berechnen aus
a) a, b, $\alpha - \beta$. (545; 305; $46^0\ 12'\ 45''$).
b) $a : b$, c, γ. (7 : 6; 91; $59^0\ 24'\ 26''$).
c) $a : b$, h_c, $\alpha - \beta$. (7 : 5; 41,616; $19^0\ 51'\ 37''$).
d) $u : v$, h_c, γ. (13 : 12; 22,357; $52^0\ 1'\ 12''$).
e) $a + b$, α, β. (165; $67^0\ 22'\ 48''$; $36^0\ 52'\ 12''$).
f) $u - v$, α, β. (5; $67^0\ 58'\ 33''$; $52^0\ 37'$).
g) c, h_c, α. (918; 540; $79^0\ 36'\ 40''$).
h) h_a, h_b, γ. (63; 96,923; $75^0\ 45'$).
i) h_a, p, β. (56; 45; $53^0\ 7'\ 49''$).
k) h_a, h_c, p. (63; 60; 80).
l) $a + b$, $a : b$, γ. (130; 7 : 6; $59^0\ 24'\ 27''$).
m) $a - b$, $h_a : h_b$, γ. (50; 5 : 7; $87^0\ 10'\ 59{,}5''$).
n) $h_b + h_a$, a, b. (31,9846; 20; 13).
o) $h_b + h_a$, F, a. (120,615; 2100; 75).
p) $a : b$, $h_a + h_b$, $\alpha - \beta$. (109 : 61; 782,37; $46^0\ 12'\ 45''$).
q) a, w_γ, γ. (928; 650,29; $72^0\ 23'\ 11''$).
r) u, a, β. (841,24; 1940; $47^0\ 55'\ 30''$).
s) w_γ, h_b, γ. (21,748; 66,621; $117^0\ 20'\ 33''$).
t) a, u, h_c. (58; 34,8; 40).
u) b, s_c, α. (125; 75,619; $20^0\ 36'\ 35''$).
v) c, h_b, s_c. (77; 71,729; 78,652).
w) $a + b$, c, γ. (121; 75; $46^0\ 23'\ 50''$).
x) $a - b$, c, γ. (184; 368; $117^0\ 20'\ 33''$).
y) $a + b$, c, $\alpha - \beta$. (482; 244; $138^0\ 36'\ 45''$).
z) $a - b$, c, $\alpha - \beta$. (103; 309; $29^0\ 18'\ 10''$).
z') $a + b$, c, r. (104; 52; 51,7857).
z'') $a - b$, c, r. (23; 75; 51,7857).

7. Die übrigen Stücke eines Parallelogramms zu berechnen aus

a) a, b, α. (675; 360; $38^0\ 2'\ 52''$).
b) a, e, $\angle$ (ae). (75; 105; $26^0\ 3'$).

c) e, f, ε. (178; 172,8; 26° 18′ 40″).
d) a, b, f. (999; 499,5; 865,16). e) a, e, f. (17; 30; 16).

8. Die übrigen Stücke eines Trapezes zu berechnen aus

a) a, b, α, β. (133,2; 55,5; 65° 15′ 10″; 54° 54′).
b) a, b, c, β. (108,9; 59,4; 70,817; 64° 25′).
c) a, b, c, e. (781,25; 218,75; 584,34; 750).
d) a, b, e, α. (80; 72,111; 60; 100° 53′ 36″).

9. Die Halbmesser dreier Kreise, von denen jeder die beiden anderen von außen berührt, sind bez. a cm, b cm und c cm lang. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks, dessen Ecken die Mittelpunkte der Kreise sind? $a = 5$; $b = 10$; $c = 15$.

10. Wie groß sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte der drei Kreise der vorhergehenden Aufgabe sind?

11. Ein Dreieck zu berechnen aus

a) F, a, b. (2016; 80; 52). b) F, a, γ. (3060; 109; 66° 59′ 24″).
c) F, h_c, α. (1134; 36; 67° 22′ 48″).
d) F, α, β. (84; 67° 22′ 49″; 53° 7′ 48″).

$$\left[ab = \frac{2F}{\sin\gamma}; \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\right]$$

e) F, ab, α. (4920; 10324; 64° 39″).
f) F, a : b, γ. (24720; 281 : 178; 81° 16′ 52″).
g) F, a + b, γ. (84; 28; 59° 29′ 21″).
h) F, a — b, γ. (3150; 35; 75° 45′).
i) F, c, γ. (3060; 102; 66° 59′ 25″).

$$\left[1)\ ab = \frac{2F}{\sin\gamma}; \quad 2)\ c^2 = (a+b)^2 - 4\,ab\cos^2\frac{\gamma}{2}\ (\S 62).\right]$$

k) F, a + b, c. (84; 28; 14). l) F, a — b, c. (10924,3; 50; 210).
m) F, a + b + c, γ. (72,308; 39; 59° 24′ 30″).

12. Den Flächeninhalt eines Parallelogramms zu berechnen aus

a) a, b, α. (75,25; 20,165; 41° 13′ 28″).
b) a, e, ∠ (ae). (125,75; 12,125; 39° 46′).
c) a, ∠ (ae), ∠ (be). (33,03; 55° 35′ 40″; 64° 24′ 20″).
d) a, e, β. (90,5; 9,9; 142° 14′ 12″).
e) e, f, ε. (23,026; 18,3; 130° 40′ 10″). f) a, e, f. (46,6; 83,2; 42).

13. Den Flächeninhalt eines Trapezes zu berechnen aus

a) a, b, c, β. (48,395; 39,125; 14,105; 54° 52′ 23″).
b) a, b, c, α. [Man ziehe durch C zu AD die Parallele.] c) a, b, c, d.
d) a, c, α, b = d. (29; 11; 65° 46′ 21″).
e) a, h, α, b = d. (220,75; 23,5; 48° 33′ 21″).

14. Den Flächeninhalt eines Vierecks zu berechnen aus

a) a, d, e, $\angle$ (ae), $\angle$ (de). b) e, $\angle$ (ae), $\angle$ (be), $\angle$ (ce), $\angle$ (de).
c) a, b, c, d, e. d) a, b, d, e, α. e) a, b, c, d, $\angle$ (ae).
f) a, b, c, d, α. g) a, b, c, α, β. h) a, c, e, f, β. i) a, b, c, e, f.
k) e, f, ε. [Bezeichnet man den einen der beiden Teile von e und f mit x bez. y, so ist
$F = \frac{1}{2} \sin \varepsilon \, [xy + x(f - y) + y(e - x) + (e - x)(f - y)]$ u. s. f.
Oder man ziehe durch die Ecken des Vierecks zu den Diagonalen die Parallelen.]
l) a, b, α, β, γ. [Wie die früheren Aufgaben; oder man verlängere BC und AD bis zu ihrem Schnittpunkte E und berechne den Flächeninhalt von ABE und CDE.]
m) a, b, c, β, γ. n) a, c, α, β, γ.
o) Den Flächeninhalt eines Vierecks aus den vier Seiten zu berechnen, wenn zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind. [Man drücke die diesen Winkeln gegenüberliegende Diagonale aus jedem der beiden durch dieselbe entstandenen Dreiecke durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel aus.]

§ 69.

Übungen.

1. Eine Kraft von a kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit der gegebenen Kraft die Winkel α und β bilden. a = 34,621; $\alpha = 45^0\ 19'\ 35''$; $\beta = 34^0\ 40'\ 25''$.

2. Zwei Kräfte wirken auf einen materiellen Punkt unter einem Winkel α; die eine ist gleich a kg und bildet mit der Mittelkraft den Winkel β. Wie groß ist die andere Seitenkraft, die Mittelkraft und der Winkel zwischen den beiden letzteren? a = 44,37; $\alpha = 60^0\ 54'\ 54''$; $\beta = 10^0\ 3'\ 57''$.

3. Zwei Kräfte von a kg und b kg wirken auf einen Massenpunkt unter einem Winkel α; wie groß ist die Mittelkraft, und welche Winkel bildet dieselbe mit den gegebenen Kräften? a = 27; b = 15; $\alpha = 80^0\ 24'\ 22''$.

4. Eine Kraft von a kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine b kg beträgt und mit der gegebenen Kraft den Winkel α bildet. Wie groß ist die andere Seitenkraft, und welchen Winkel bildet sie mit der gegebenen Kraft? a = 99,95; b = 90,75; $\alpha = 56^0\ 4'\ 20''$.

5. Eine Kraft von a kg soll in zwei Seitenkräfte von b kg und c kg zerlegt werden; welche Winkel bilden diese Seitenkräfte mit der gegebenen Kraft? a = 18; b = 24,25; c = 16,25.

---

6. Zwei Punkte liegen mit dem Fuße einer a m hohen Säule in derselben Horizontalebene und auf derselben geraden Linie; wie weit sind diese Punkte von einander entfernt, wenn sie von der Spitze der Säule unter den Depressionswinkeln α und β erscheinen? a = 16,5; $\alpha = 20^0\ 25'\ 30''$; $\beta = 10^0\ 30'\ 45''$.

7. Um wie viel ist ein Schornstein erhöht, wenn der oberste und der unterste Punkt der Erhöhung von einem Punkte, der in der Horizontalebene

des Fußes des Schornsteins liegt und a m von dem Fuße entfernt ist, unter den Elevationswinkeln α und β erscheinen? a = 19; $\alpha = 45^0\ 35'\ 45''$; $\beta = 30^0\ 20'\ 15''$.

8. Auf einem Berge steht eine Säule; man hat von einem a m bergabwärts gelegenen Punkte die Höhenwinkel der Spitze und des Fußes der Säule gleich α und β gemessen. Wie hoch ist die Säule? a = 189,98; $\alpha = 42^0\ 30'\ 45''$; $\beta = 36^0\ 56'\ 45''$.

9. Auf dem Abhange eines Berges steht ein Turm, dessen Höhe bestimmt werden soll; man mißt hierzu vom Fuße des Turmes den Abhang hinauf eine Strecke gleich a m und in dem Endpunkte derselben den Höhenwinkel der Spitze gleich α und den Tiefenwinkel des Fußes gleich β. a = 74,13; $\alpha = 8^0\ 45'\ 30''$; $\beta = 19^0\ 30'$.

10. Um die Höhe eines Turmes zu berechnen, zu dessen Fuße man nicht gelangen kann, mißt man in der Horizontalebene des Fußes eine Standlinie gleich a m, deren Verlängerung den Turm treffen würde, und in den Endpunkten derselben die Höhenwinkel α und β der Turmspitze. a = 62,33; $\alpha = 62^0\ 50'\ 40''$; $\beta = 36^0\ 25'\ 20''$.

11. Zwei senkrecht übereinander liegende Fenster eines Hauses, das an dem einen Ufer eines Flusses steht, sind a m von einander entfernt; am anderen Ufer gerade gegenüber steht ein Pfahl auf derselben Horizontalebene, auf welcher das Haus steht; die Depressionswinkel von den Fenstern nach diesem Pfahle sind gleich α und β. Wie breit ist der Fluß? a = 4,7; $\alpha = 13^0\ 35'\ 20''$; $\beta = 9^0\ 27'$.

12. Auf der Spitze eines Berges steht ein a m hoher Aussichtsturm; die Spitze und der Fuß des Turmes erscheinen von einem Punkte, der in der Horizontalebene des Fußes des Berges liegt, unter den Elevationswinkeln α und β. Wie hoch ist der Berg? a = 32; $\alpha = 33^0\ 17'\ 45''$; $\beta = 31^0\ 5'$.

13. Von der Spitze eines Berges und von einem a m senkrecht unter der Spitze gelegenen Punkte des Berges erscheint ein in der Horizontalebene des Fußes des Berges liegender Punkt unter den Depressionswinkeln α und β. Wie hoch ist der Berg? a = 189; $\alpha = 42^0\ 17'\ 20''$; $\beta = 37^0\ 29'\ 50''$.

14. Auf einer Horizontalebene stehen zwei Türme, von denen der eine a m hoch ist; von der Spitze dieses Turmes sind der Elevationswinkel der Spitze des anderen gleich α und der Depressionswinkel des Fußes des anderen gleich β gemessen. Wie hoch ist der zweite Turm, und wie groß die Entfernung der beiden Türme? a = 82; $\alpha = 10^0\ 15'\ 30''$; $\beta = 45^0\ 15'\ 15''$.

15. Wie groß ist die Breite eines Flusses, wenn dieselbe von einem a m über dem Wasserspiegel des Flusses befindlichen Fenster eines Hauses, welches b m vom Flusse entfernt ist, unter dem Winkel α erscheint? a = 12; b = 40; $\alpha = 3^0\ 32'$.

---

16. Man kann die Entfernung zweier Orte A und B nicht direkt messen; um dieselbe zu bestimmen, mißt man

a) von A aus eine Standlinie AC gleich a m und in den Punkten A und C die Winkel BAC = α und BCA = β. a = 373; $\alpha = 81^0\ 4'$; $\beta = 53^0\ 2'$.

b) die Entfernungen eines Punktes C von A und B, welche a m und b m betragen, und den Winkel ACB gleich α. $a = 537{,}89$; $b = 325$; $\alpha = 65^0\ 30'\ 30''$.

c) von einem Punkte C, der mit A und B auf einer Geraden liegt, eine a m lange Standlinie bis D und die Winkel ACD gleich α, $CDA = \beta$ und $CDB = \gamma$. $a = 311$; $\alpha = 120^0\ 35'$; $\beta = 35^0\ 45'\ 30''$; $\gamma = 37^0\ 30'$.

1) C liegt zwischen A und B. 2) C liegt auf der Verlängerung von AB.

d) eine beliebige Standlinie CD gleich a m, welche mit AB in derselben Ebene liegt und AB nicht schneidet, und die Winkel $ACD = \alpha$, $ACB = \beta$, $ADC = \gamma$ und $BDC = \delta$. $a = 275$; $\alpha = 48^0\ 57'\ 40''$; $\beta = 30^0\ 25'\ 10''$; $\gamma = 52^0\ 50'\ 45''$; $\delta = 140^0\ 46'\ 25''$.

17. Um die Höhe eines Turmes, zu dessen Fuße man nicht gelangen kann, zu bestimmen, mißt man in der Horizontalebene des Fußes eine beliebige Standlinie AB gleich a m, in A den Elevationswinkel der Spitze des Turmes gleich α und außerdem die Winkel, welche die Standlinie mit den Visierlinien von ihren beiden Endpunkten A und B nach dem Fuße des Turmes bildet, gleich β und γ. $a = 98{,}8$; $\alpha = 35^0\ 29'\ 55''$; $\beta = 30^0\ 30'$; $\gamma = 56^0\ 35'\ 20''$.

18. In der Horizontalebene des Fußes eines a m hohen Turmes liegen zwei Punkte, deren Entfernung von einander bestimmt werden soll. Man mißt hierzu von der Spitze die Depressionswinkel α und β der beiden Punkte und den Winkel γ, welcher gebildet wird durch die Visierlinien

a) von der Spitze nach den beiden Punkten. $a = 33$; $\alpha = 12^0\ 42'\ 32''$; $\beta = 17^0\ 27'\ 27''$; $\gamma = 44^0\ 55'\ 36''$.

b) vom Fuße nach den beiden Punkten. $a = 30$; $\alpha = 12^0\ 59'\ 41''$; $\beta = 16^0\ 41'\ 57''$; $\gamma = 35^0\ 5'\ 13''$.

19. Auf dem Abhange eines Berges steht ein Turm AB. Man mißt vom Fuße B desselben den Abhang hinab die a m lange Standlinie BC und in C den Winkel BCA gleich α, ferner von C aus in derselben Richtung weiter die b m lange Standlinie CD und in D den Winkel $BDA = \beta$. Wie hoch ist der Turm? $a = 75$; $b = 50{,}25$; $\alpha = 30^0\ 25'\ 20''$; $\beta = 21^0\ 20'\ 30''$.

20. Um die Höhe eines auf dem Abhange eines Berges stehenden Turmes, zu dessen Fuße man nicht gelangen kann, zu bestimmen, mißt man den Abhang hinab eine a m lange Standlinie, deren Verlängerung durch den Fuß des Turmes gehen würde, in den beiden Endpunkten der Standlinie die Höhenwinkel der Spitze gleich α und β und in dem oberen Endpunkte den Höhenwinkel des Fußes gleich γ. $a = 61$; $\alpha = 55^0\ 45'$; $\beta = 45^0\ 30'$; $\gamma = 30^0\ 45'$.

21. Um die Höhe AB eines Punktes A über einer Horizontalebene zu berechnen, mißt man in dieser Ebene die Entfernungen dreier auf einer Geraden liegenden Punkte C, D und E von einander, CD gleich a m und DE gleich b m, und in C, D und E die Elevationswinkel α, β und γ des Punktes A. $a = 120$; $b = 114$; $\alpha = 22^0\ 30'$; $\beta = 30^0\ 15'$; $\gamma = 28^0\ 45'$. [Drücke BC, BD und BE durch AB und die gegebenen Winkel aus, ferner $\angle$ CDB in dem Dreieck CDB und seinen Nebenwinkel EDB in dem Dreieck EDB durch die drei Seiten.]

§ 70.

Übungen.

1. Zu beweisen, daß

a) $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$. [§ 2.]

b) $p : q = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$. $\left[\text{Bilde } \frac{h_c}{q} \text{ und } \frac{h_c}{p}.\right]$

c) $(p + q) : (p - q) = \sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$. [Planim. § 101, 100.]

d) $(a + b) : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. [§ 64.]

e) $(a + b) : (p - q) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. [Aus c) und d) und § 61, 1) oder aus der Figur.]

f) $(a - b) : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. [§ 64.]

g) $(a - b) : (p - q) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

h) $(a^2 - b^2) : c^2 = \sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$. [d) und f).]

i) $(p^2 - q^2) : c^2 = \sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$. [h) und a).]

k) $(a^2 - b^2) : (p - q)^2 = \sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$.

l) $h_a = b \sin\gamma = c \sin\beta = a \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2r \sin\beta \sin\gamma$.

$h_b = c \sin\alpha = a \sin\gamma = b \frac{\sin\gamma \sin\alpha}{\sin\beta} = 2r \sin\gamma \sin\alpha$.

$h_c = a \sin\beta = b \sin\alpha = c \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma} = 2r \sin\alpha \sin\beta$.

m) $p = a \cos\beta = 2r \sin\alpha \cos\beta$.
$q = b \cos\alpha = 2r \cos\alpha \sin\beta$.

n) $h_b + h_a = c(\sin\alpha + \sin\beta)$.
$h_b - h_a = c(\sin\alpha - \sin\beta)$.

o) $h_b + h_a = (a + b)\sin\gamma$.
$h_b - h_a = (a - b)\sin\gamma$. [l); oder: Trägt man im Dreieck ABC an BE $= h_b$ von E aus AD $= h_a$ bis zum Punkte F an, zieht durch F zu AC die Parallele, welche die Verlängerung von BC im Punkte G schneidet, fällt von C auf GF die Senkrechte CH, dann ist BF $= h_b + h_a$, $\angle$ BGF $= \gamma$, wenn $\gamma < 1$ R, $\angle$ BGF $= 180^0 - \gamma$, wenn $\gamma > 1$ R, CH $= h_a$, CG $= b$, BG $= a + b$, $\angle$ CGA $= \frac{1}{2}\gamma$. Ebenso trägt man auf BE $= h_b$ von E aus AD $= h_a$ bis F′ ab u. s. w.]

p) $h_b + h_a = 2c \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. [o) und d).]

$h_b - h_a = 2c \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

q) $h_b^2 - h_a^2 = c^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$.

r) $(h_b + h_a) : (h_b - h_a) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = (a + b) : (a - b)$.

s) $c : (u - v) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$. [$u : v = a : b$.]

t) $(u - v) : (a - b) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} : \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. [s) und f) oder Planim. § 101, 115.]

u) $(u - v) : (p - q) = \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} : \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

v) $(u - v) : (a - b) = (a - b) : (p - q)$.

w) $p - q = 2r \sin(\alpha - \beta)$. [Planim. § 101, 100:
$(p - q) : a = \sin(\alpha - \beta) : \sin \alpha$ und $a = 2r \sin \alpha$.
Oder Planim. § 101, 226 aus $\triangle CMC'$.]

x) $(p - q)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta)$. [Planim. § 101, 100.]

y) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$. [Aus m) und
$c = 2r \sin \gamma = 2r \sin(\alpha + \beta)$ bez. w).]

z) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$. [n) und p).]

2. Ein Dreieck zu berechnen aus:

a) $a + b,\ p - q,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

b) $a^2 - b^2,\ \alpha,\ \beta$.

c) $a^2 - b^2,\ c,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

d) $p^2 - q^2,\ \alpha,\ \beta$.

e) $p,\ q,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

f) $a^2 - b^2,\ p - q,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

g) $h_b + h_a,\ \alpha,\ \beta$.

h) $h_b + h_a,\ c,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

i) $h_b^2 - h_a^2,\ \alpha,\ \beta$.

k) $h_b^2 - h_a^2,\ c,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

l) $a + b,\ h_b + h_a,\ \alpha\ (\alpha - \beta)$.

m) $a - b,\ h_b - h_a,\ \alpha - \beta$.

n) $a + b,\ h_b - h_a,\ \gamma$.

o) $a - b,\ h_b + h_a,\ \gamma$.

p) $a,\ h_b + h_a,\ \gamma$.

q) $a + b,\ h_a,\ \gamma$.

r) $u - v,\ \alpha,\ \beta$.

s) $u,\ v,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

t) $u - v,\ a - b,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

u) $u - v,\ p - q,\ \gamma\ (\alpha - \beta)$.

B. Goniometrie.

1. Erklärungen der trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel und Änderung der Funktionen durch Änderung des Winkels.

§ 71.

Erklärung. Die Goniometrie ist die Lehre von der Bestimmung der Winkel durch Verhältnisse von Strecken, die s. g. trigonometrischen (goniometrischen) Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen)*) und von den Beziehungen dieser Funktionen untereinander.

§ 72.

1. Man zeichne zwei aufeinander senkrecht stehende gerade Linien, AA′ und BB′, von denen die erste die horizontale, die zweite die vertikale Achse genannt werden möge, und bezeichne den Schnittpunkt der beiden Geraden mit O. Kennt man die Entfernungen eines Punktes P von jeder der beiden Geraden und setzt außerdem fest, daß die Entfernung eines Punktes von der horizontalen Achse positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem er oberhalb oder unterhalb dieser Achse liegt, und daß seine Entfernung von der vertikalen Achse als positiv oder negativ zu betrachten ist, je nachdem er rechts oder links von dieser Achse liegt, so ist die Lage des Punktes eindeutig bestimmt.

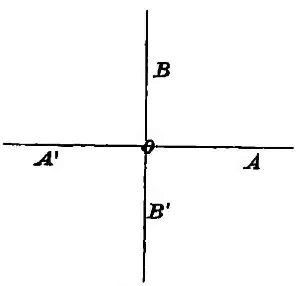

Fig. 41.

2. Man nennt die vier Teile, in welche die Ebene durch die beiden festen Geraden AA′ und BB′ geteilt wird, Quadranten, und zwar AOB den ersten, BOA′ den zweiten, A′OB′ den dritten und B′OA den vierten Quadranten.

Im 1. Quadr. ist d. Entf. e. P. von d. horizont. Achse pos., von d. vert. Achse pos.,
„ 2. „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ pos., „ „ „ „ neg.,
„ 3. „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ neg., „ „ „ „ neg.,
„ 4. „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ neg., „ „ „ „ pos.

*) Planim. § 154.

3. Um die Erklärungen der trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Winkels zu geben, denken wir uns denselben so auf das Achsenkreuz gelegt, daß der Scheitel auf den Punkt O, der eine Schenkel auf OA fällt, und der Winkel erhalten wird, wenn man sich OA um O in der entgegengesetzten Richtung, wie der Zeiger einer Uhr, bis in die Lage des anderen Schenkels gedreht denkt. Man nennt den ersten Schenkel den festen, den zweiten den beweglichen Schenkel.

Wenn ein Winkel zwischen 0° und 90° oder 90° und 180° oder 180° und 270° oder 270° und 360° beträgt, so nennt man ihn einen Winkel bez. im 1. oder 2. oder 3. oder 4. Quadranten.

§ 73.

1. **Erklärung 1.** Der **Sinus** eines beliebigen Winkels ist das Verhältnis aus der Entfernung eines beliebigen Punktes des beweglichen Schenkels von der horizontalen Achse zu dem begrenzten Schenkel.

Erklärung 2. Der **Kosinus** eines beliebigen Winkels ist das Verhältnis aus der Entfernung eines beliebigen Punktes des beweglichen Schenkels von der vertikalen Achse zu dem begrenzten Schenkel.

Ist daher

$\angle AOP_1 = \alpha_1$, $\angle AOP_2 = \alpha_2$,
$\angle AOP_3 = \alpha_3$ und $\angle AOP_4 = \alpha_4$, so ist

$$\sin\alpha_1 = \frac{P_1A_1}{OP_1}; \quad \cos\alpha_1 = \frac{P_1B_1}{OP_1};$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{P_2A_2}{OP_2}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{P_2B_2}{OP_2};$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{P_3A_3}{OP_3}; \quad \cos\alpha_3 = \frac{P_3B_3}{OP_3};$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{P_4A_4}{OP_4}; \quad \cos\alpha_4 = \frac{P_4B_4}{OP_4}.$$

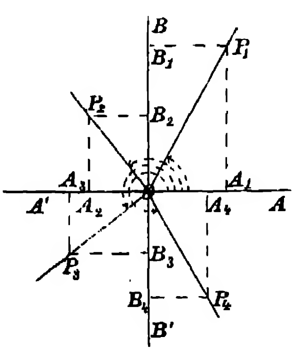

Fig. 42.

2. **Folgerungen.**

Der Sinus eines Winkels im 1. und 2. Quadr. ist pos., im 3. und 4. negativ.
Der Kosinus eines Winkels im 1. und 4. Quadr. ist pos., im 2. und 3. negativ.

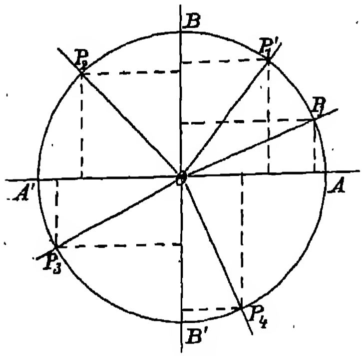

Fig. 43.

3. Schlägt man um O mit beliebigem Halbmesser den Kreis und nimmt auf dem beweglichen Schenkel als Punkt P den Schnittpunkt dieses Schenkels mit dem Kreise an, so erhalten die Brüche, durch welche die Sinus und die Kosinus der Winkel dargestellt werden, gleiche Nenner, gleich dem Radius des Kreises, wodurch sich die absoluten Werte jeder dieser beiden Funktionen für verschiedene Winkel leichter mit einander vergleichen lassen.

Folgerungen. Es ergiebt sich, daß mit wachsendem Winkel

der Sinus	im 1.	Quadranten	wächst	von	0	bis	1,
	„ 2.	„	abnimmt	„	1	„	0,
	„ 3.	„	abnimmt	„	0	„	—1,
	„ 4.	„	wächst	„	—1	„	0;
der Kosinus	„ 1.	„	abnimmt	„	1	„	0,
	„ 2.	„	abnimmt	„	0	„	—1,
	„ 3.	„	wächst	„	—1	„	0,
	„ 4.	„	wächst	„	0	„	1.

§ 74.

1. Erklärung 1. Die **Tangente** eines beliebigen Winkels ist das Verhältnis aus der Entfernung eines beliebigen Punktes des beweglichen Schenkels von der horizontalen Achse zu der Entfernung dieses Punktes von der vertikalen Achse.

Erklärung 2. Die **Kotangente** eines beliebigen Winkels ist das Verhältnis aus der Entfernung eines beliebigen Punktes des beweglichen Schenkels von der vertikalen Achse zu der Entfernung dieses Punktes von der horizontalen Achse.

Folglich ist nach Fig. 42

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{P_1A_1}{P_1B_1};\quad \operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{P_1B_1}{P_1A_1};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{P_2A_2}{P_2B_2};\quad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{P_2B_2}{P_2A_2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{P_3A_3}{P_3B_3};\quad \operatorname{ctg}\alpha_3 = \frac{P_3B_3}{P_3A_3};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{P_4A_4}{P_4B_4};\quad \operatorname{ctg}\alpha_4 = \frac{P_4B_4}{P_4A_4}.$$

2. Folgerungen. Die Tangente und die Kotangente von Winkeln

im 1. und 3. Quadranten sind positiv,
„ 2. „ 4. „ „ negativ.

3. Folgerungen. Aus Fig. 43 ergiebt sich, daß mit wachsendem Winkel

die Tangente	im 1.	Quadranten	wächst	von	0	bis	∞,
	„ 2.	„	wächst	„	$-\infty$	„	0,
	„ 3.	„	wächst	„	0	„	∞,
	„ 4.	„	wächst	„	$-\infty$	„	0;
die Kotangente	„ 1.	„	abnimmt	„	∞	„	0,
	„ 2.	„	abnimmt	„	0	„	$-\infty$,
	„ 3.	„	abnimmt	„	∞	„	0,
	„ 4.	„	abnimmt	„	0	„	$-\infty$.

4. Anmerkung 1. Die Änderungen der absoluten Werte der Tangente (Kotangente) bei wachsendem Winkel lassen sich auch leicht erkennen, wenn man auf der horizontalen (vertikalen) Achse in gleichem Abstande von O die beiden Senkrechten errichtet, da dann die Brüche, durch welche die Tangenten (Kotangenten) der Winkel dargestellt werden, wieder gleiche Nenner erhalten. (Vergl. § 73, 3.)

5. Anmerkung 2. Errichtet man [Fig. 44] auf dem horizontalen Durchmesser im Endpunkte Q′ die Senkrechte Q′P′ bis zum Schnitt mit der Verlängerung des beweglichen Schenkels OP des Winkels AOP $= \alpha$, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{P'Q'}{r}\ [= P'Q', \text{ wenn } r = 1],$$

wo P′Q′ die Tangente an den Kreis im Punkte Q′ ist. Hieraus erklärt sich der Name der Funktion Tangente.

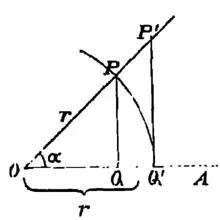

Fig. 44.

6. Anmerkung 3. Das Verhältnis OP : OQ heißt die Sekante des Winkels α (sec α), das Verhältnis OP : PQ die Kosekante von α (cosec α); folglich ist $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ und $\log\sec\alpha = -\log\cos\alpha$, $\log\operatorname{cosec}\alpha = -\log\sin\alpha$.

Der Name Sekante erklärt sich daraus, daß $\sec\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'} = \frac{OP'}{r}$ [$= OP'$, wenn $r = 1$].

Diese beiden Funktionen gewähren bei Umformungen sehr selten Vorteile; sie werden daher im folgenden nicht berücksichtigt werden.

§ 75.

Zusammenstellung der Grenzwerte aller vier Funktionen für die einzelnen Quadranten:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Sinus	0	$+1$	± 0	-1	$+0$
Kosinus	$+1$	± 0	-1	∓ 0	$+1$
Tangente	0	$\pm\infty$	∓ 0	$\pm\infty$	∓ 0
Kotangente	∞	± 0	$\mp\infty$	± 0	$\mp\infty$

Der Zeichenwechsel tritt bei Sinus und Kosinus nur ein, wenn sie den Wert 0 annehmen, bei der Tangente und Kotangente, wenn sie den Wert 0 oder ∞ annehmen.

§ 76.

Übungen.

1. In welchen Quadranten kann φ liegen, wenn

a) $\sin\varphi = 0{,}5$?	b) $\cos\varphi = 0{,}8$?
c) $\operatorname{tg}\varphi = 2$?	d) $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{3}$?
e) $\sin\varphi = -0{,}5$?	f) $\cos\varphi = -\frac{1}{6}$?
g) $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{3}$?	h) $\operatorname{ctg}\varphi = -1{,}5$?

2. Wie viele Winkel können der Bedingung genügen

a) $\sin\varphi = \frac{2}{3}$?	b) $\cos\varphi = 0{,}2$?
c) $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$?	d) $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}25$?
e) $\sin\varphi = -\frac{1}{3}$?	f) $\cos\varphi = -0{,}6$?
g) $\operatorname{tg}\varphi = -0{,}2$?	h) $\operatorname{ctg}\varphi = -0{,}75$?
i) $\sin\varphi = 1{,}5$?	k) $\cos\varphi = -2{,}5$?
l) $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5$?	m) $\operatorname{ctg}\varphi = -2{,}75$?

3. Wie viele Winkel im ersten und zweiten Quadranten genügen den Aufgaben 2a bis 2m?

2. Die Funktionen von Winkeln über 90° auszudrücken durch Funktionen von spitzen Winkeln.

§ 77.

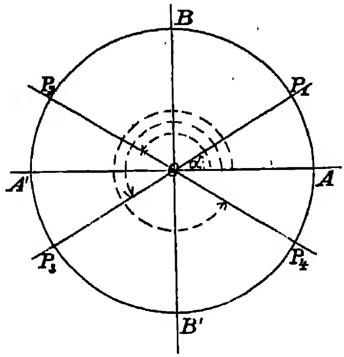

Fig. 45.

1. In Fig. 45 sei

$$\angle AOP_1 = \alpha < 90^0;$$

ferner sei

$$\angle AOP_1 = A'OP_2 = A'OP_3 = AOP_4.$$

Dann ist

$$\angle AOP_2 = 180^0 - \alpha;$$
$$\angle AOP_3 = 180^0 + \alpha;$$
$$\angle AOP_4 = 360^0 - \alpha.$$

Die Senkrechten von P_1, P_2, P_3 und P_4 auf die horizontale Achse sind absolut genommen unter sich gleich; ebenfalls die Senkrechten auf die vertikale Achse. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\sin(180^0 - \alpha) &= + \sin\alpha;\\
\cos(180^0 - \alpha) &= - \cos\alpha;\\
\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) &= - \mathrm{tg}\,\alpha;\\
\mathrm{ctg}(180^0 - \alpha) &= - \mathrm{ctg}\,\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(180^0 + \alpha) &= - \sin\alpha; & \sin(360^0 - \alpha) &= - \sin\alpha;\\
\cos(180^0 + \alpha) &= - \cos\alpha; & \cos(360^0 - \alpha) &= + \cos\alpha;\\
\mathrm{tg}(180^0 + \alpha) &= + \mathrm{tg}\,\alpha; & \mathrm{tg}(360^0 - \alpha) &= - \mathrm{tg}\,\alpha;\\
\mathrm{ctg}(180^0 + \alpha) &= + \mathrm{ctg}\,\alpha; & \mathrm{ctg}(360^0 - \alpha) &= - \mathrm{ctg}\,\alpha.
\end{aligned}$$

Dieselben Beziehungen gelten auch, wenn $90^0 < \alpha < 180^0$, und die letzten vier Beziehungen auch, wenn $180^0 < \alpha < 360^0$.

2. Aus § 73 und 74 und Planim. § 156 folgt, daß die Funktionen eines spitzen Winkels gleich den entsprechenden Kofunktionen des Komplementwinkels sind, also für $\alpha < 90^0$

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha); \qquad \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha);$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90^0 - \alpha); \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90^0 - \alpha).$$

Ist $\alpha > 45^0$, so ist $90^0 - \alpha < 45^0$.

Aus 1) und 2) folgt daher, daß man die Funktionen beliebiger Winkel von 0^0 bis 360^0 durch Funktionen von Winkeln zwischen 0^0 und 45^0 ausdrücken kann.

3. Wenn man den beweglichen Schenkel OP eines Winkels AOP $= \alpha$ von beliebiger Größe in positiver Richtung um 90^0 weiter dreht bis in die Lage

OP', so daß $\angle AOP' = 90^0 + \alpha$ entsteht, so ist die Entfernung des Punktes P' von der horizontalen Achse gleich der Entf. des P. P von der vertik. Achse und die Entf. des P. P' von der vertik. Achse gleich der Entf. des P. P von der horiz. Achse mit entgegengesetztem Vorzeichen. Folglich ist

$$\sin(90^0+\alpha) = \cos\alpha; \qquad \operatorname{tg}(90^0+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\cos(90^0+\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(90^0+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich für $\alpha > 90^0$, wenn man OP in negativer Richtung um 90^0 weiter dreht,

$$\sin(\alpha-90^0) = -\cos\alpha; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-90^0) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\cos(\alpha-90^0) = \sin\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-90^0) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

§ 78.

Übungen.

1. Zu beweisen, daß ($\alpha \leqq 45^0$)

a) $\sin(45^0+\alpha) = \cos(45^0-\alpha)$. b) $\cos(45^0+\alpha) = \sin(45^0-\alpha)$.
c) $\operatorname{tg}(45^0+\alpha) = \operatorname{ctg}(45^0-\alpha)$. d) $\operatorname{ctg}(45^0+\alpha) = \operatorname{tg}(45^0-\alpha)$.

2. x zu berechnen, wenn

a) $x = \sin 60^0 - \cos 30^0$. b) $x = \cos 60^0 - \sin 30^0$.
c) $x = \sin 72^0 + \operatorname{tg} 75^0 - \cos 18^0 - \operatorname{ctg} 15^0$.
d) $x = \cos 15^0 - \operatorname{tg} 54^0 + \operatorname{ctg} 36^0 - \sin 75^0$.
e) $x = (a^2+b^2)\sin\alpha + 2ab\cos(90^0-\alpha) - (a+b)^2\sin\alpha$.
f) $x = a^2(\cos 30^0 - \operatorname{tg} 60^0) + (a^2-b^2)\operatorname{ctg} 30^0 - (a^2\sin 60^0 - b^2\operatorname{tg} 60^0)$.

3. Zu beweisen, daß ($0^0 < \alpha \leqq 90^0$)

a) $\sin(90^0+\alpha) = \sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha$.
b) $\cos(90^0+\alpha) = -\cos(90^0-\alpha) = -\sin\alpha$.
c) $\operatorname{tg}(90^0+\alpha) = -\operatorname{tg}(90^0-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.
d) $\operatorname{ctg}(90^0+\alpha) = -\operatorname{ctg}(90^0-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

4. x zu berechnen, wenn

a) $x = \sin 120^0 - \sin 60^0$. b) $x = \cos 75^0 + \cos 105^0$.
c) $x = \operatorname{tg} 75^0 + \operatorname{tg} 105^0$. d) $x = \operatorname{ctg} 144^0 + \operatorname{ctg} 36^0$.
e) $x = \sin 120^0 - \cos 30^0$. f) $x = \sin 150^0 - \cos 60^0$.
g) $x = \cos 135^0 + \sin 45^0$. h) $x = \cos 165^0 + \sin 75^0$.
i) $x = \operatorname{tg} 135^0 + \operatorname{ctg} 45^0$. k) $x = \operatorname{ctg} 144^0 + \operatorname{tg} 54^0$.

5. x zu berechnen, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ und

a) $x = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}$. b) $x = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}$.

c) $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. d) $x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

e) $x = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}$.

f) $x = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}$.

g) $x = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4}\right) - \left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2} - \left\{\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4}\right)\right\}\right]$.

6. x zu berechnen, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ und

a) $x = \sin(\alpha+\beta) - \sin\gamma$. b) $x = \cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma$.
c) $x = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma$. d) $x = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) + \operatorname{ctg}\gamma$.
e) $x = \sin(\alpha+\gamma) - \sin\beta$. f) $x = \operatorname{ctg}(\beta+\gamma) + \operatorname{ctg}\alpha$.

g) $x = \cos(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) + \cos\gamma + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma$.

h) $x = \sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$.

i) $x = \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)$
$+ \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$.

7. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Wie groß ist

a) $\sin 150^0$? b) $\sin 210^0$? c) $\sin 330^0$? d) $\cos 60^0$?
e) $\cos 120^0$? f) $\cos 240^0$? g) $\cos 300^0$?

8. $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wie groß ist

a) $\cos 135^0$? b) $\cos 225^0$? c) $\cos 315^0$? d) $\sin 45^0$?
e) $\sin 135^0$? f) $\sin 225^0$? g) $\sin 315^0$? h) $\operatorname{tg} 45^0$?
i) $\operatorname{tg} 135^0$? k) $\operatorname{tg} 225^0$? l) $\operatorname{tg} 315^0$? m) $\operatorname{ctg} 45^0$?
n) $\operatorname{ctg} 135^0$? o) $\operatorname{ctg} 225^0$? p) $\operatorname{ctg} 315^0$?

9. $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$. Wie groß ist

a) $\operatorname{tg} 120^0$? b) $\operatorname{tg} 240^0$? c) $\operatorname{tg} 300^0$? d) $\operatorname{ctg} 30^0$?
e) $\operatorname{ctg} 150^0$? f) $\operatorname{ctg} 210^0$? g) $\operatorname{ctg} 330^0$?

10. Durch Funktionen von Winkeln des ersten Quadranten auszudrücken

a) $\sin 210^0$. b) $\cos 250^0$. c) $\operatorname{tg} 290^0$. d) $\operatorname{ctg} 310^0$.
e) $\sin 170^0\,50'\,51''$. f) $\cos 225^0\,35'\,25''$. g) $\operatorname{tg} 178^0\,36'\,15''$.
h) $\operatorname{ctg} 305^0\,27'\,50''$.

11.*) Welche Winkel zwischen 0^0 und 180^0 genügen den Gleichungen

a) $\sin\varphi - \frac{1}{2} = 0$? b) $\cos\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$? c) $\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$?

*) Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionen von 45^0, 60^0, 30^0 abgeleitet sind.

d) $\operatorname{ctg}\varphi - \sqrt{3} = 0$? e) $\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$? f) $\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$?
g) $\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{3} = 0$? h) $\sin\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$? i) $\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$?
k) $\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0$? l) $\operatorname{ctg}\varphi + 1 = 0$? m) $\sin\varphi + \frac{1}{2} = 0$?
n) $\sin\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$?

12. Ist $0^0 < \alpha < 90^0$, so ist $\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$.

Ist $90^0 < \alpha < 180^0$, so ist $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90^0)$;
$\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90^0)$; denn

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \cos(90^0 - [180^0 - \alpha]) = \cos(\alpha - 90^0)$$
und
$$\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha) = -\sin(90^0 - [180^0 - \alpha]) = -\sin(\alpha - 90^0).$$

3. Die Funktionen der Winkel über 360°.

§ 79.

1. Denkt man sich den beweglichen Schenkel in Fig. 45 in der entgegengesetzten Richtung, wie der Zeiger einer Uhr, weiter gedreht, bis er wieder mit dem festen Schenkel zusammenfällt, und läßt man ihn dann seine Drehung in demselben Sinne fortsetzen, so entstehen Winkel über 360°. Man sieht sofort, daß die Funktionswerte für die Winkel im 5., 6., 7., 8. Quadranten dieselben sind, wie für die entsprechenden Winkel im 1., 2., 3., 4. Quadranten.

Ist also n eine absolute ganze Zahl, so ist

$$\sin(n.360^0 + \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(n.360^0 + \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(n.360^0 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(n.360^0 + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Die Tangente und die Kotangente haben schon für die Winkel im 3. und 4. Quadranten dieselben Werte, wie für die entsprechenden Winkel im 1. und 2. Quadranten; folglich erhält man die Beziehungen

$$\operatorname{tg}(n.180^0 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(n.180^0 + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

2. Zu einem Mittelpunktswinkel von n^0 gehört auch ein Bogen von n^0. Die Länge des Bogens von 360^0 ist gleich $2r\pi$ Längeneinheiten (L. E.), wenn der Radius des Kreises r L. E. beträgt. Ist daher der Radius eines Kreises (des Einheitskreises) gleich der Längeneinheit, so ist die Länge des Bogens von 360^0 gleich 2π L. E., die Länge des Bogens von 180^0 gleich π L. E., die Länge des Bogens von 1^0 gleich $\frac{\pi}{180}$ L. E. $= \frac{3{,}1415\,9265\ldots}{180}$ L. E. $= 0{,}017\,453\ldots$ L. E., die Länge eines Bogens von n^0 gleich $= \frac{n.\pi}{180}$ L. E. $= n.0{,}017\,453\ldots$ L. E.

3. Setzt man in die trigonometrischen Funktionen statt des Winkels den zugehörigen Bogen des Einheitskreises in Längeneinheiten ausgedrückt ein, ist

$$\sin 360^0 = \sin 2\pi; \quad \sin 180^0 = \sin \pi; \quad \sin 90^0 = \sin \frac{\pi}{2};$$

$$\sin 45^0 = \sin \frac{\pi}{4}; \quad \sin 1^0 = \sin 0{,}017\,453\ldots$$

Die Formeln in 1. gehen dann, wenn ein beliebiger Bogen des Einheitskreises b L. E. beträgt, über in

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi + b) &= \sin b; & \cos(2n\pi + b) &= \cos b; \\ \operatorname{tg}(2n\pi + b) &= \operatorname{tg} b; & \operatorname{ctg}(2n\pi + b) &= \operatorname{ctg} b; \\ \operatorname{tg}(n\pi + b) &= \operatorname{tg} b; & \operatorname{ctg}(n\pi + b) &= \operatorname{ctg} b. \end{aligned}$$

Die Formeln des § 77 gehen über in:

$$\begin{aligned} \sin([2n+1]\pi - b) &= \sin b; & \cos([2n+1]\pi - b) &= -\cos b; \ldots \\ \sin([2n+1]\pi + b) &= -\sin b; & \cos([2n+1]\pi + b) &= -\cos b; \ldots \\ \sin(2n\pi - b) &= -\sin b; & \cos(2n\pi - b) &= +\cos b; \ldots \end{aligned}$$

4. Wenn ein Bogen des Einheitskreises gleich 2π L. E. ist, so beträgt er 360^0; wenn ein Bogen des Einheitskreises gleich 1 L. E. ist (oder wenn ein Bogen eines beliebigen Kreises gleich dem Radius ist), so beträgt er

$$\frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}2957795\ldots = 57^0 17' 44'',81\ldots = 206\,264'',81\ldots$$

4. Die Funktionen der negativen Winkel.

§ 80.

Durch die Drehung des beweglichen Schenkels um den Scheitel O in der der bisherigen Drehung entgegengesetzten Richtung, also in der Richtung der Drehung des Uhrzeigers, aus der Lage des festen Schenkels OA entstehen Winkel, welche als negativ zu betrachten sind. (Vergl. § 56, 2.)

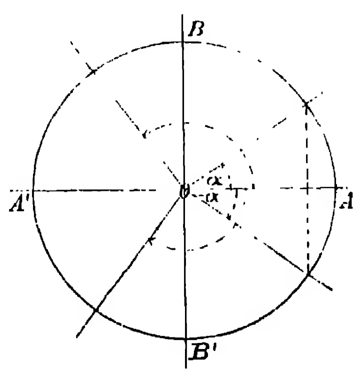

Fig. 46.

Es ergiebt sich leicht aus Fig. 46, daß für jede beliebige Größe von α

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha; \\ \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha; \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha; \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}$$

§ 81.

Übungen.

x zu berechnen, wenn

a) $x = \sin(-30^0) + \sin 150^0$. b) $x = \cos(-30^0) + \cos 150^0$.
c) $x = \mathrm{tg}\,(-30^0) - \mathrm{tg}\,150^0$. d) $x = \mathrm{ctg}\,(-30^0) - \mathrm{ctg}\,150^0$.
e) $x = \sin(-30^0) + \sin(-60^0) - \sin 210^0 - \cos(-150^0)$.
f) $x = \sin(-120^0) - \sin(-150^0) + \sin 210^0 - \cos 210^0$.

5. Abhängigkeit der trigonometrischen Funktionen eines Winkels von einander.

§ 82.

1. Lehrsatz 1. Die Summe aus dem Quadrate des Sinus eines Winkels und dem Quadrate des Kosinus dieses Winkels ist gleich 1.

Beweis. Ist $\angle$ POA $= \alpha$ ein spitzer Winkel, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck POA

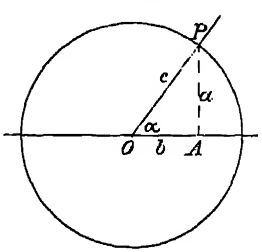

Fig. 47.

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

$$\textbf{Ia.}\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ist α ein stumpfer Winkel, so ist $180^0 - \alpha$ spitz; folglich ist

$$\sin^2(180^0 - \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha) = 1.$$

Da nun $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, so ist

$$\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2 = 1,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ist α ein Winkel im dritten Quadranten, so ist $\alpha = 180^0 + \delta$, wo δ ein spitzer Winkel ist; folglich ist

$$\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1.$$

Da nun $\sin\alpha = \sin(180^0 + \delta) = -\sin\delta$, also $\sin\delta = -\sin\alpha$,
und $\cos\alpha = \cos(180^0 + \delta) = -\cos\delta$, also $\cos\delta = -\cos\alpha$,

so ist
$$(-\sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 = 1,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ist α ein Winkel im vierten Quadranten, so ist $360^0 - \alpha$ spitz; folglich ist
$$\sin^2(360^0 - \alpha) + \cos^2(360^0 - \alpha) = 1.$$

Da nun $\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha$, so ist
$$(-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Da nach § 80 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, also $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, und $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$, also $\cos\alpha = +\cos(-\alpha)$, so folgt aus
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$(-\sin(-\alpha))^2 + \cos^2(-\alpha) = 1,$$
$$\sin^2(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) = 1.$$

2. **Zusatz.**
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Das Vorzeichen muß in jedem besonderen Falle nach der Größe des Winkels α festgestellt werden.

3. **Lehrsatz 2. Die Tangente eines Winkels ist gleich dem Quotienten aus dem Sinus und dem Kosinus dieses Winkels, und die Kotangente eines Winkels ist gleich dem Quotienten aus dem Kosinus und dem Sinus dieses Winkels.**

Beweis. [Fig. 42.] Ist α ein beliebiger Winkel und PA und PB die von einem beliebigen Punkte P des beweglichen Schenkels auf die horizontale bez. vertikale Achse gefällten Senkrechten, so ist nach § 74
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PA}{PB} = \frac{PA:PO}{PB:PO} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{also } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \textbf{Ib.}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{PB}{PA} = \frac{PB:PO}{PA:PO} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{also } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \textbf{Ic.}$$

4. **Zusatz. Das Produkt aus der Tangente eines Winkels und der Kotangente dieses Winkels ist gleich 1.**
$$\textbf{Id.} \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Folglich ist auch
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \text{ und } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

§ 83.

1. Aus den Beziehungen des vorigen Paragraphen folgt, daß, wenn **eine Funktion eines Winkels bekannt ist, auch die übrigen Funktionen dieses Winkels gefunden werden können.**

2. Ist $\sin\alpha = k$, so ist

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-k^2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k}{\pm\sqrt{1-k^2}} = \pm\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-k^2}}{k} = \pm\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

3. Ebenso findet man aus $\cos\alpha$ die übrigen Funktionen.

4. Ist $\operatorname{tg}\alpha = k$, so ist

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{k}.$$

$\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ berechnet man auf folgende Weise. Es ist

$$(1)\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Dies ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$. Eine zweite Gleichung zwischen diesen beiden Unbekannten ist

$$(2)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen bestimmt man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$.

$$(1)\ \sin\alpha = k\,.\cos\alpha;\ \text{eingesetzt in (2)}$$

$$k^2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$(k^2+1)\cos^2\alpha = 1,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+k^2},$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \text{ oder } \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Aus (1) folgt dann $\sin\alpha = \pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ oder $\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

5. Ebenso findet man aus $\operatorname{ctg}\alpha$ die übrigen Funktionen.
Es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\ \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

§ 84.

Übungen.

1. x zu berechnen, wenn

a) $x = \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0$. b) $x = \sin^2 72^0 + \cos^2 108^0$.
c) $x = \cos^2 30^0 + \cos^2 120^0$. d) $x = \mathrm{tg}\ 72^0\ \mathrm{tg}\ 18^0$.
e) $x = \mathrm{tg}\ 75^0\ \mathrm{ctg}\ 105^0$. f) $x = \mathrm{ctg}\ 30^0\ \mathrm{ctg}\ 120^0$.
g) $x = \sin^2 36^0 + \mathrm{tg}\ 36^0\ \mathrm{tg}\ 54^0 + \sin^2 54^0$.
h) $x = \sin^2 30^0 + \mathrm{tg}\ 30^0\ \mathrm{tg}\ 120^0 + \sin^2 120^0$.
i) $x = \cos^2 72^0 - \mathrm{ctg}\ 75^0\ \mathrm{ctg}\ 165^0 + \cos^2 162^0$.
k) $x = \cos(30^0 - \alpha) + \mathrm{tg}\ 60^0\ \mathrm{tg}\ 30^0 - \sin(60^0 + \alpha)$.
l) $x = \sin(120^0 - \alpha) + \sin^2 36^0 - \sin(60^0 + \alpha) + \sin^2 126^0$.
m) $x = \sin(144^0 - \alpha) + \mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}(90^0 - \alpha) - \cos(54^0 - \alpha)$.
n) $x = \sin(45^0 - \alpha) - \cos(30^0 + \alpha) + \sin^2 30^0 - \cos(45^0 + \alpha) + \sin(60^0 - \alpha) + \sin^2 60^0$.
o) $x = \cos^2 18^0 - \left[\mathrm{ctg}(15^0 + 2\alpha) - \cos^2 72^0 + \mathrm{tg}\left(24^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\right] + \mathrm{tg}(75^0 - 2\alpha) + \mathrm{ctg}\left(66^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
p) $x = \mathrm{ctg}\ 144^0 - \cos^2\alpha + 2[1 + \sin\alpha\cos\alpha\ \mathrm{tg}(90^0 - \alpha)] + \mathrm{ctg}\ 36^0 + \sin^2(180^0 - \alpha)$.
q) $x = \mathrm{tg}\ 135^0 + (1 - \cos 15^0)(1 + \sin 75^0) + \mathrm{ctg}\ 45^0 - \cos 75^0 \cos 15^0\ \mathrm{tg}\ 15^0$.
r) $x = \sin 120^0 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \cos 30^0 + 2\sin^2\alpha\ \mathrm{tg}(90^0 + \alpha)$.
s) $x = \sin\alpha\,[\{\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) + \mathrm{ctg}(90^0 + \alpha)\}\cos\alpha - 2\cos(90^0 + \alpha)] + \mathrm{ctg}\ 135^0 + \mathrm{tg}\ 45^0$.
t) $x = \sin(-30^0) - \sin 210^0 + \mathrm{tg}\ 150^0\ \mathrm{ctg}(-30^0)$.
u) $x = \cos(-30^0) - \cos 330^0 - \mathrm{tg}(-30^0)\ \mathrm{ctg}\ 210^0$.
v) $x = \sin(-135^0)\cos(-135^0) + \sin(-45^0)\cos 315^0 - \mathrm{tg}(-120^0)\ \mathrm{ctg}(-60^0)$.

2. x zu berechnen, wenn

a) $2x\sin^2\alpha - (3 - x)\cos^2\alpha + 4 = 3\sin^2\alpha - x\cos^2\alpha + 1$.
b) $(x - 4)\sin^2\alpha = (2 - x)\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$.
c) $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x + (1 + 2x)\cos^2\alpha = 2 - \sin^2\alpha$.
d) $(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)x - (1 - 3x)\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$.

e) $(1 - x)\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta - x\cos^2\alpha = x\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$.
f) $(1 - x)\cos^2\alpha\sin^2\beta = x\cos^2\beta - (1 - x)\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - x\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta$.
g) $(x - \sin^2\alpha)\sin^2\alpha = (x - \cos^2\alpha)\cos^2\alpha$. $[a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2).]$
h) $(x - 2 + \sin^2\alpha)\sin^2\alpha - (x - 2 + \cos^2\alpha)\cos^2\alpha = 0$.

i) $x \operatorname{ctg} \alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \dfrac{x}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha = 0.$

k) $\dfrac{2x}{\operatorname{ctg} \alpha} - 4 \operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{tg} \alpha \left(\operatorname{ctg} \alpha + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right).$

l) $\sin \alpha + x (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha \left(\dfrac{x}{\cos \alpha} + 1\right).$

m) $x \cos \alpha + \sin \alpha = \cos \alpha (1 + x \operatorname{tg} \alpha).$

n) $2x \sin \alpha \cos \alpha + x (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha (4 + [\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha] x).$

o) $\operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - 1) + 6 + (1 - 2x) \operatorname{tg} \alpha = 2x \dfrac{2 \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha.$

p) $4(x - 2) + \sin \alpha (\sin \alpha - 2x \operatorname{ctg} \alpha) = 1 - \cos \alpha \left(2x + \cos \alpha + \dfrac{4}{\cos \alpha}\right).$

q) $\cos \alpha \left(x \cos \alpha - \dfrac{1}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \alpha\right) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + (2 - x) \sin^2 \alpha.$

---

3. Wie groß ist $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, wenn
a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$? b) $\sin \alpha = \frac{28}{53}$? c) $\sin \alpha = 0{,}8$? d) $\sin \alpha = 0{,}96$?

4. Wie groß ist $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, wenn
a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$? b) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$? c) $\cos \alpha = 0{,}6$? d) $\cos \alpha = 0{,}352$?

5. Wie groß ist $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, wenn
a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$? b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$? c) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}75$? d) $\operatorname{tg} \alpha = 4{,}95$?

6. Wie groß ist $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, wenn
a) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$? b) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{11}{60}$? c) $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}05$? d) $\operatorname{ctg} \alpha = 2{,}4$?

7. Die Funktionen der Winkel 18^0 und 72^0 zu berechnen. [Der Mittelpunktswinkel des regelmäßigen 10ecks ist gleich 36^0; nach Planim. § 142, Aufg. 1, d ist die Seite des regelm. 10ecks gleich $\frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$. Ist also in dem gleichschenkligen Dreiecke ACB $\angle ACB = 36^0$ und $AC = BC = r$, so ist $AB = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$. Fällt man von der Spitze C auf AB die Senkrechte CD, so ist $\sin 18^0 = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$ u. s. w.]

8. Die Funktionen der Winkel 36^0 und 54^0 zu berechnen. [Trägt man in dem gleichschenkligen Dreiecke AOB, in welchem $\angle ACB = 36^0$ und $AC = BC = r$ ist, AB auf AC von C aus ab bis D und verbindet D mit B, so ist nach Planim. § 140 und § 142 $DB = CD = AB = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$. Fällt man daher von D auf BC die Senkrechte DE, so ist

$$\cos 36^0 = \frac{\frac{1}{2} r}{\frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ u. s. w.]}$$

6. Die Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel auszudrücken durch die Funktionen der einzelnen Winkel.

§ 85.

1. **Aufgabe 1.** Den Sinus der Summe zweier Winkel durch die Funktionen der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. a) α und β und ebenfalls ihre Summe $\alpha + \beta$ seien spitze Winkel.

Man konstruiere die Summe von α und β, indem man β an α anträgt. $\angle$ AOC sei gleich α, $\angle$ COD $= \beta$, dann ist $\angle$ AOD $= \alpha + \beta$. Um die Funktionen von $\alpha + \beta$, α und β darstellen zu können, fälle man von einem beliebigen Punkte E des einen Schenkels OD auf den anderen Schenkel OA des Winkels AOD $= \alpha + \beta$ die Senkrechte EF, von E auf OC die Senkrechte EG und von G auf OA die Senkrechte GH.

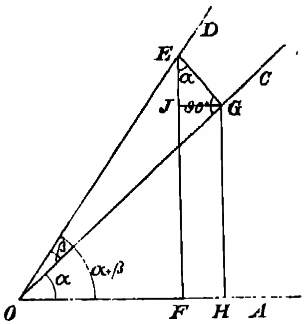

Fig. 48a.

Dann ist $\sin(\alpha + \beta) = \frac{EF}{OE}$.

Zieht man durch G zu OA die Parallele GJ, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{JF + JE}{OE} = \frac{GH + JE}{OE} \text{ oder}$$

$$(1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{GH}{OE} + \frac{JE}{OE}.$$

Nun ist $\frac{GH}{OG} = \sin\alpha$, also $GH = OG \sin\alpha$

und $\frac{OG}{OE} = \cos\beta$, also $OG = OE \cos\beta$,

folglich ist $GH = OE \sin\alpha \cos\beta$

und $(2) \quad \frac{GH}{OE} = \sin\alpha \cos\beta$.

Ferner ist, da nach Planim. § 37, 8 $\angle$ JEG $= \alpha$,

$$\frac{JE}{EG} = \cos\alpha, \text{ also } JE = EG \cos\alpha$$

und $$\frac{EG}{OE} = \sin\beta, \text{ also } EG = OE \sin\beta,$$

folglich ist $$JE = OE \cos\alpha \sin\beta$$

und $$(3) \quad \frac{JE}{OE} = \cos\alpha \sin\beta.$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\textbf{IIa.} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

b) Der Beweis bleibt vollständig derselbe, wenn α und β spitze Winkel sind, aber $\alpha + \beta$ ein stumpfer Winkel ist (Fig. 48b).

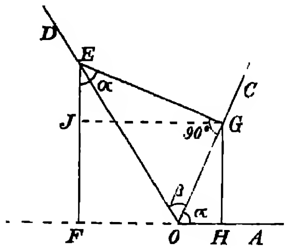

Fig. 48b.

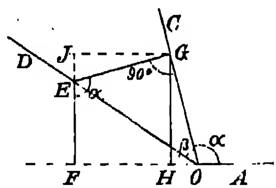

Fig. 48c.

c) Ist α oder β selbst stumpf und $\alpha + \beta$ noch ein Winkel im zweiten Quadranten [Fig. 48c], so stellt sich die Strecke EF zwar als eine Differenz dar, der sich für $\sin(\alpha+\beta)$ ergebende Ausdruck nimmt aber wieder die Form einer Summe an, da der Kosinus des stumpfen Winkels negativ ist [$JE = EG \cos(180^0 - \alpha) = -EG \cos\alpha$].

d) Es läßt sich übrigens auf die obige Weise leicht zeigen, daß die vorstehende Formel allgemein giltig ist.

2. Aufgabe 2. Den Kosinus der Summe zweier Winkel durch die Funktionen der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. a) α, β und $\alpha + \beta$ seien spitz. [Fig. 48a.] Es ist

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OF}{OE} = \frac{OH - FH}{OE} = \frac{OH - GJ}{OE} = \frac{OH}{OE} - \frac{GJ}{OE}.$$

Da nun $$OH = OG \cos\alpha = OE \cos\beta \cos\alpha$$
und $$GJ = GE \sin\alpha = OE \sin\beta \sin\alpha, \text{ so ist}$$

$$\textbf{IIb.} \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

b) Sind α und β spitz, $\alpha + \beta$ stumpf [Fig. 48b], so ist $\cos(\alpha+\beta)$ negativ, und es ist, wenn OF als absolute Länge betrachtet wird,

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{OF}{OE} = -\frac{FH-OH}{OE} = \frac{OH-FH}{OE}$$ u. s. w. wie oben.

c) Ist α oder β selbst stumpf und $\alpha+\beta$ noch ein Winkel im zweiten Quadranten [Fig. 48c], so ist

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{OF}{OE} = -\frac{OH+HF}{OE} = -\frac{OH+GJ}{OE} = -\frac{OH}{OE} - \frac{GJ}{OE}$$

$$= -\frac{-OG\cos\alpha}{OE} - \frac{GE\sin\alpha}{OE} = -\frac{-OE\cos\beta\cos\alpha}{OE} - \frac{OE\sin\beta\sin\alpha}{OE}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

d) Auf obige Weise läßt sich leicht zeigen, daß die vorstehende Formel allgemein giltig ist.

§ 86.

1. Aufgabe 1. Den Sinus der Differenz zweier Winkel durch die Funktionen der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. α und β seien spitze Winkel, $\alpha > \beta$. [Fig. 49.]

Man konstruiere die Differenz von α und β, indem man β auf α abträgt. Dann fälle man von einem beliebigen Punkte E des Schenkels OD, welcher den Winkeln AOD $= \alpha - \beta$ und COD $= \beta$ gemeinsam ist, auf die beiden anderen Schenkel OA und OC die Senkrechten EF bez. EG und von G auf OA die Senkrechte GH. Zieht man noch durch G zu OA die Parallele GJ, dann ist

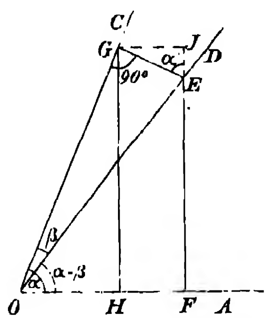

Fig. 49.

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{EF}{OE}$$

$$= \frac{JF-JE}{OE} = \frac{GH-JE}{OE} = \frac{GH}{OE} - \frac{JE}{OE}.$$

Da nun wie in § 85, 1 $\frac{GH}{OE} = \sin\alpha\cos\beta$ und $\frac{JE}{OE} = \cos\alpha\sin\beta$,

so ist **IIc.** $\mathbf{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.}$

2. Aufgabe 2. Den Kosinus der Differenz zweier Winkel durch die Funktionen der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. α und β seien spitze Winkel, $\alpha > \beta$. [Fig. 49.] Es ist

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{OF}{OE} = \frac{OH + HF}{OE} = \frac{OH + GJ}{OE} = \frac{OH}{OE} + \frac{GJ}{OE}.$$

Da nun, wie in § 85, 2a, $OH = OG \cos\alpha = OE \cos\beta \cos\alpha$
und $GJ = GE \sin\alpha = OE \sin\beta \sin\alpha$, so ist

$$\textbf{IId.} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

3. Daß die beiden Formeln dieses Paragraphen auch für beliebige Winkel richtig sind, läßt sich aus den entsprechenden Figuren leicht nachweisen, wenn man nur die Vorzeichen der Funktionen gehörig beachtet.

4. Auch auf analytischem Wege ergeben sich die beiden Formeln des § 86 aus den beiden Formeln des § 85.

Ist $\alpha > \beta$, so kann man setzen $\alpha = \beta + \delta$, und es ist
$\sin\alpha = \sin(\beta + \delta) = \sin\beta \cos\delta + \cos\beta \sin\delta$ oder, da $\delta = \alpha - \beta$,

$$(1) \quad \sin\alpha = \sin\beta \cos(\alpha - \beta) + \cos\beta \sin(\alpha - \beta);$$ ferner ist

$\cos\alpha = \cos(\beta + \delta) = \cos\beta \cos\delta - \sin\beta \sin\delta$ oder

$$(2) \quad \cos\alpha = \cos\beta \cos(\alpha - \beta) - \sin\beta \sin(\alpha - \beta).$$

Eliminiert man aus (1) und (2) (nach der Additionsmethode) erst $\cos(\alpha - \beta)$ und dann $\sin(\alpha - \beta)$, so erhält man, da $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$,

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha - \beta) \quad \text{und}$$
$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

5. Die Formeln für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ erhält man aus den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ in § 85, indem man $-\beta$ für β setzt.

§ 87.

Die Allgemeinheit der Formeln in § 85 und § 86 läßt sich auch auf folgende Weise beweisen.

1. Nach § 85, 1a und b und § 85, 2a und b gelten die beiden Formeln des § 85 für zwei beliebige spitze Winkel α und β.

2. Ist einer der beiden Winkel α und β, z. B. α, stumpf, der andere spitz, so kann man setzen $\alpha = 90^0 + \alpha'$, wo α' spitz ist, und es ist

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(90^0 + \alpha' + \beta) = \cos(\alpha' + \beta) \text{ nach § 77, 3} \\
&= \cos\alpha' \cos\beta - \sin\alpha' \sin\beta \text{ nach § 85, 2} \\
&= \cos(\alpha - 90^0) \cos\beta - \sin(\alpha - 90^0) \sin\beta, \text{ da } \alpha' = \alpha - 90^0, \\
&= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \text{ nach § 77, 3;} \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(90^0 + \alpha' + \beta) = -\sin(\alpha' + \beta) \text{ nach § 77, 3} \\
&= -\sin\alpha' \cos\beta - \cos\alpha' \sin\beta \text{ nach § 85, 1} \\
&= -\sin(\alpha - 90^0) \cos\beta - \cos(\alpha - 90^0) \sin\beta \\
&= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \text{ nach § 77, 3.}
\end{aligned}$$

Die beiden Formeln des § 85 gelten also auch für einen stumpfen und einen spitzen Winkel.

3. Sind α und β stumpf, und setzt man $\beta = 90^0 + \beta'$, wo β' spitz ist, so ist

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + 90^0 + \beta') = \cos(\alpha + \beta') \text{ nach § 77, 3} \\
&= \cos\alpha \cos\beta' - \sin\alpha \sin\beta' \text{ nach § 87, 2} \\
&= \cos\alpha \cos(\beta - 90^0) - \sin\alpha \sin(\beta - 90^0) \\
&= \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \text{ nach § 77, 3} \\
&= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Die beiden Formeln gelten also auch für zwei stumpfe Winkel.

4. So zeigt man, daß die beiden Formeln des § 85 auch für einen Winkel im 3. und einen im 1. Quadranten gelten, ebenso für einen Winkel im 3. und einen im 2. Quadranten, für zwei Winkel im dritten Quadranten u. s. w., d. h. die beiden Formeln des § 85 gelten für beliebige positive Winkel.

5. Nach § 86, 4 müssen dann aber auch die beiden Formeln in § 86 für beliebige positive Winkel gelten, wenn $\alpha > \beta$.

6. Daß die Formeln auch für negative Winkel gelten, ergiebt sich auf folgende Weise. Es ist

$$\begin{aligned}
\sin[(-\alpha) + (-\beta)] &= \sin[-(\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta) \text{ nach § 80} \\
&= -\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\
&= -[-\sin(-\alpha)]\cos(-\beta) - \cos(-\alpha)[-\sin(-\beta)] \\
&\qquad \text{nach § 80} \\
&= \sin(-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta) \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

§ 88.

Die Formeln in § 85 und § 86 kann man auch mit Hilfe des Lehrsatzes des Ptolemäus § 3 beweisen.

Aus den Figuren 50 a, b, c, d, in denen AB ein Durchmesser ist, ergiebt sich zunächst der folgende Hilfssatz:

Der Sinus eines Umfangswinkels (α) ist gleich dem Quotienten aus der zugehörigen Sehne (BC) und dem Durchmesser, und der Kosinus eines spitzen Umfangswinkels (α) ist gleich dem Quotienten aus der Supplementarsehne (AC) (d. h. der zu dem Bogen (AC) gehörigen Sehne, welcher den zu dem Peripheriewinkel (α) gehörigen Bogen (BC) zum Halbkreise (AB) ergänzt) und dem Durchmesser. Es ist daher in Fig. 50a

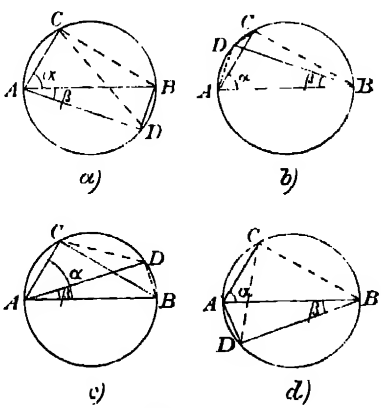

Fig 50.

$BC = AB \sin\alpha$, $\quad BD = AB \sin\beta$,
$CD = AB \sin(\alpha + \beta)$, $\quad AC = AB \cos\alpha$,
$AD = AB \cos\beta$.

Nach dem Lehrsatze des Ptolemäus ergeben sich nun aus den Figuren 50a, b, c, d bez. die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ CD \,.\, AB = BC \,.\, AD + AC \,.\, BD,\\ &\text{b)}\ CD \,.\, AB + BC \,.\, AD = AC \,.\, BD,\\ &\text{c)}\ CD \,.\, AB + AC \,.\, BD = BC \,.\, AD,\\ &\text{d)}\ CD \,.\, AB = AC \,.\, BD + BC \,.\, AD, \end{aligned}$$

und aus diesen Gleichungen und dem obigen Hilfssatze die Formeln in § 85 und 86. Es ist nur zu beachten, daß in Fig. 50b $\angle CBD = CBA - ABD = 90^0 - \alpha - \beta = 90^0 - (\alpha + \beta)$, und daß in Fig. 50d $\angle CBD = CBA + ABD = 90^0 - \alpha + \beta = 90^0 - (\alpha - \beta)$.

§ 89.

Aufgabe 1. Die Tangente und die Kotangente der Summe und der Differenz zweier Winkel durch die Tangenten bez. Kotangenten der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. Es ist

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Dividiert man den Zähler und den Nenner des erhaltenen Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$ (da man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ erhalten will), so entsteht

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Würde man z. B. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ durch $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\beta$ ausdrücken wollen, so müßte man den Zähler und den Nenner des oben für $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ erhaltenen Bruches durch $\cos\alpha\sin\beta$ dividieren.

§ 90.

Übungen.

1. Durch Funktionen von 30^0 und 45^0 auszudrücken

a) $\sin 75^0$. b) $\sin 15^0$. c) $\cos 75^0$. d) $\cos 15^0$.

2. Durch Funktionen von 45^0 und 60^0 auszudrücken

a) $\sin 15^0$. b) $\cos 15^0$. c) $\sin 105^0$. d) $\cos 105^0$.

3. Wie groß sind $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, wenn

a) $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = 0{,}28$? b) $\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\beta = 0{,}936$?

4. Wie groß sind $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, wenn gegeben sind

a) $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$? b) $\operatorname{ctg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\beta$? c) $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\beta$? d) $\operatorname{ctg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$?

5. Wie groß sind $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, wenn

a) $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = 0{,}28$? b) $\sin\alpha = 0{,}96$; $\cos\beta = \frac{84}{85}$?
c) $\operatorname{tg}\alpha = 1$? $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$? d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{40}{9}$?
e) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}05$; $\operatorname{ctg}\beta = 4{,}95$?

6. x zu berechnen, wenn

a) $x = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} \cdot \dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$.

b) $x = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} + \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

c) $x = \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma - \sin(\beta+\gamma)\sin\alpha - \sin(\gamma-\alpha)\sin\beta$.
d) $x = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\beta+\gamma)\cos\alpha + \sin(\gamma-\alpha)\cos\beta$.
e) $x = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - (\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta)$.
f) $x = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + (\sin\alpha+\cos\beta)(\sin\alpha-\cos\beta)$.
g) $x = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

h) $x = \dfrac{\sin(30^0+\alpha)+\cos(30^0-\alpha)-\sin(60^0-\alpha)+\cos(60^0+\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

i) $x = \dfrac{\sin^2(45^0+\alpha)-\sin^2(45^0-\alpha)}{\cos^2(45^0+\alpha)-\cos^2(45^0-\alpha)}$.

k) $x = \cos(36^0+\alpha)\cos(54^0-\alpha) - \sin(36^0+\alpha)\sin(54^0-\alpha)$.

l) $x = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

m) $x = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

n) $x = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} \cdot \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

o) $x = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} \cdot \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

p) $x = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} - \operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

q) $x = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} - \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

r) $x = \operatorname{tg}(45^0 + \alpha) - \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

s) $x = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} \operatorname{ctg}(45^0 - \alpha)$.

t) $x = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) - (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)$.

u) $x = \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)}$.

7. Durch Funktionen von α, β und γ auszudrücken

a) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$. b) $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$. c) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta + \gamma)$.
d) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta - \gamma)$.

8. x zu berechnen, wenn

a) $x = \sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

b) $x = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta - \gamma) - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

c) $x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

7. Die Funktionen eines Winkels durch Funktionen des halben Winkels oder die Funktionen des doppelten Winkels durch Funktionen des einfachen Winkels auszudrücken und umgekehrt.

§ 91.

1. Setzt man in den beiden Formeln des § 85 α statt β, so erhält man

$$\begin{array}{ll} \text{IIIa.} & \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \text{IIIb.} & \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \text{ oder} \\ \text{IIIc.} & \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \text{IIId.} & \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{array} \Bigg\} \text{ nach § 82, 2.}$$

oder

$$\begin{array}{ll} \text{III'a.} & \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ \text{III'b.} & \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \\ \text{III'c.} & \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \\ \text{III'd.} & \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1. \end{array}$$

In beiden Formelgruppen ist der Winkel auf der linken Seite doppelt so groß als der auf der rechten oder der Winkel auf der rechten Seite die Hälfte des Winkels auf der linken.

2. Aus den obigen Formeln oder aus den Formeln des § 89 ergeben sich

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \text{ oder}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

3. Aus $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ und $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ folgt

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Dividiert man den Zähler und den Nenner dieses Bruches durch $\cos^2 \alpha$ bez. $\sin^2 \alpha$, so ist

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} \text{ oder}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

4. Ebenso erhält man aus $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ und

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} \text{ oder}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

5. Aus 2., 3. und 4. folgt, daß sich alle Funktionen eines Winkels durch die Tangente oder die Kotangente des halben Winkels rational ausdrücken lassen.

§ 92.

1. Löst man die beiden Gleichungen § 91, III c und III d nach $\sin\alpha$ bez. $\cos\alpha$ und ebenso die beiden Gleichungen § 91, III′c und III′d nach $\sin\frac{\alpha}{2}$ bez. $\cos\frac{\alpha}{2}$ auf, so erhält man

$$\textbf{IV a.}\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)};$$

$$\textbf{IV b.}\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$$

oder
$$\textbf{IV′a.}\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)};$$

$$\textbf{IV′b.}\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}.$$

2. Aus den Formeln IV a und IV b bez. IV′a und IV′b ergeben sich

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}};\quad \text{oder}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

3. Erweitert man in jeder der Formeln § 92,2 den Bruch unter der Wurzel mit seinem Zähler oder seinem Nenner, so folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

oder
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

§ 93.

Übungen.

1. Die Formeln § 91, III′a, III′c und III′d ergeben sich für spitze Winkel auch auf folgende Weise. Man trage die Hypotenuse AB = c des bei C rechtwinkligen Dreiecks ACB an die Kathete AC = b im Punkte A an bis C′,

verbinde C' mit B und fälle $AD \perp BC'$, dann ist $\angle AC'B = ABC' = \frac{\alpha}{2}$, $DC' = DB = c \cos\frac{\alpha}{2}$, $BC' = 2c\cos\frac{\alpha}{2}$. Aus $a = c\sin\alpha$ und $a = 2c\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ folgt $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, aus $b = c\cos\alpha$ und $b + c = 2c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ folgt $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$. III′c erhält man, wenn man AB auf AC vom Punkte A aus abträgt bis C'' u. s. w. Siehe auch § 61.

2. a) $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ auszudrücken durch Funktionen von $\frac{\alpha}{4}$,
b) $\sin\frac{\alpha}{4}$ und $\cos\frac{\alpha}{4}$ durch Funkt. v. $\frac{\alpha}{8}$,
c) $\sin 4\alpha$ und $\cos 4\alpha$ durch Funkt. v. 2α,
d) $\sin 20\alpha$ und $\cos 20\alpha$ durch Funkt. v. 10α,
e) $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch Funkt. v. $\frac{\alpha+\beta}{2}$,
f) $\sin 2(\alpha-\beta)$ und $\cos 2(\alpha-\beta)$ durch Funkt. v. $\alpha-\beta$,
g) $\sin 60^0$ und $\cos 60^0$ durch Funkt. v. 30^0,
h) $\sin 90^0$ und $\cos 90^0$ durch Funkt. v. 45^0.

3. a) Gegeben ist $\cos 4\alpha$; wie groß sind die Funktionen von 2α?
b) $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$; wie groß sind die Funktionen von 30^0?
c) $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; wie groß sind die Funktionen von 15^0?
d) $\cos 90^0 = 0$; wie groß sind die Funktionen von 45^0?
e) $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; wie groß sind die Funktionen von $22^0\,30'$?
f) $\cos 72^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$; wie groß sind die Funktionen von 36^0? [§ 84, 7 und 8.]

4. x zu berechnen, wenn

a) $x = \frac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$. b) $x = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} - \sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

c) $x = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$. d) $x = \sin 2\alpha - 2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

e) $x = \frac{\sin 10\alpha\cos 10\alpha\operatorname{tg}10\alpha + \cos^2 10\alpha}{\operatorname{ctg}10\alpha\sin 20\alpha + 2\sin^2 10\alpha}$.

f) $x = \sin\frac{\alpha}{20}\cos\frac{\alpha}{20}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{20} - 1 + \frac{\sin\frac{1}{10}\alpha}{2\sin\frac{1}{20}\alpha}\cos\frac{1}{20}\alpha$.

g) $x\left(5 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha$
$= \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

h) $x = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \cos 2\alpha) - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

i) $x = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta)$.

k) $x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - 4\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}$.

l) $x = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - 2\frac{\sin 2(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}$.

m) $x = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$. n) $x = 1 - \cos\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

o) $x = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

p) $x = (1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\left(\cos\alpha - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

q) $x = \frac{(\cos^2\alpha - \cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

r) $x = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

s) $x = 2\cos 2\alpha - \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

t) $x + \frac{4}{\sin 2\alpha} = (1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha) - (1-\operatorname{tg}\alpha)(1-\operatorname{ctg}\alpha)$.

u) $x - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} + (1-x)\sin\alpha$.

v) $x = \cos^2(45^0 - \alpha) - \sin^2(45^0 - \alpha) - \sin 2\alpha$.

w) $x = \cos^4(45^0 - \alpha) - \sin^4(45^0 - \alpha) - \sin 2\alpha$.

x) $x = \operatorname{tg}(45^0 + \alpha) + \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) - \frac{2}{\cos 2\alpha}$.

y) $x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

z) $x = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 4\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

8. Die Funktionen eines Vielfachen eines Winkels durch Funktionen des einfachen Winkels auszudrücken.

§ 94.

1.
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise folgt

2. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

3. $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$
$= 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$
$= 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha.$ [$4\alpha = 2\alpha + 2\alpha$ oder $= 2 \cdot 2\alpha$.]

4. $\cos 4\alpha = 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1$
$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$

5. $\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$

6. $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$

§ 95.

Übungen.

x zu berechnen, wenn

1. $x = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha\sin 2\alpha}.$ 2. $x = \dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha\sin 2\alpha}.$

3. $x = \dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha.$ 4. $x = \dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha.$

5. $x = \dfrac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}.$

6. $x = \sin 3\alpha + \cos 3\alpha - (\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + 2\sin 2\alpha).$

7. $x = \sin 3\alpha - \cos 3\alpha + (\cos\alpha + \sin\alpha)(1 - 2\sin 2\alpha).$

8. $x = \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha - 3\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha + \cos^3 2\alpha.$

9. $x = \sin(30^0 + \alpha)\sin(30^0 - \alpha) - \dfrac{\cos 3\alpha}{4\cos\alpha}.$

10. $x = \cos(30^0 + \alpha)\cos(30^0 - \alpha) - \dfrac{\sin 3\alpha}{4\sin\alpha}.$

9. Die Summe oder die Differenz der Sinus oder der Kosinus zweier Winkel in einen eingliedrigen Ausdruck zu verwandeln oder durch Funktionen der halben Summe und der halben Differenz der beiden Winkel auszudrücken.

§ 96.

Durch Addition und Subtraktion der Formeln

$\sin(\delta + \varepsilon) = \sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon$ und
$\sin(\delta - \varepsilon) = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon$

erhält man

$$\sin(\delta+\varepsilon)+\sin(\delta-\varepsilon) = 2\sin\delta\cos\varepsilon \quad \text{und}$$
$$\sin(\delta+\varepsilon)-\sin(\delta-\varepsilon) = 2\cos\delta\sin\varepsilon.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus den Formeln für $\cos(\delta+\varepsilon)$ und $\cos(\delta-\varepsilon)$

$$\cos(\delta+\varepsilon)+\cos(\delta-\varepsilon) = 2\cos\delta\cos\varepsilon \quad \text{und}$$
$$\cos(\delta+\varepsilon)-\cos(\delta-\varepsilon) = -2\sin\delta\sin\varepsilon.$$

Setzt man in diesen vier Gleichungen

$$\delta+\varepsilon=\alpha \qquad \text{und} \qquad \delta-\varepsilon=\beta,$$

woraus

$$\delta=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

so gehen sie über in

$$\textbf{V a.} \quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\textbf{V b.} \quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\textbf{V c.} \quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\textbf{V d.} \quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

§ 97.

Übungen.

x zu berechnen, wenn

1. $x = \sin 75^0 + \sin 15^0.$

2. $x = \dfrac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 45^0}.$

3. $x = \dfrac{\cos 75^0 - \cos 15^0}{\cos 45^0}.$

4. $x = \dfrac{\cos 15^0 + \cos 75^0}{\sin 45^0 \operatorname{tg} 60^0}.$

5. $x = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$

6. $x = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$

7. $x = (\sin\alpha+\sin\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$

8. $x = \dfrac{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$

9. $x = \dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$

10. $x = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) - \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.
11. $x = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) + (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$.
12. $x = \frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{\cos 2\alpha + \cos\alpha} - \operatorname{tg}\frac{3}{2}\alpha$.
13. $x = \frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha} + \operatorname{ctg} 2\alpha$.
14. $x = \frac{\cos 5\alpha + \cos\alpha}{\cos 5\alpha - \cos\alpha} + \operatorname{ctg} 3\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$.
15a. $x = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 + 2\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$.
15b. $x = \frac{1}{1 + 2\cos\alpha} - \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$.
[Zu 15a und 15b ist der erste Bruch mit $\sin\alpha$ zu erweitern.]
16a. $x = \sin\alpha + \sin(120^0 + \alpha) + \sin(240^0 + \alpha)$.
16b. $x = \sin(30^0 + \alpha) + \sin(150^0 + \alpha) + \sin(270^0 + \alpha)$.

In einen eingliedrigen Ausdruck zu verwandeln:

17. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. 18. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. 19. $1 - \sin^2\alpha$.
20. $1 - \cos^2\alpha$. 21. $1 - 2\sin^2\alpha$. 22. $2\cos^2\alpha - 1$.
23. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$. 24. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$. 25. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$.
26. $\operatorname{ctg}^2\alpha - 1$. 27. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha$. 28. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.
29. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$. 30. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$. 31. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.
32. $1 \pm \cos\alpha$. [§ 91, III'.] 33. $\frac{1}{\cos\alpha} \pm 1$. 34. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.
35. $\operatorname{tg}\alpha \pm \sin\alpha$. 36. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$. 37. $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha$.
38. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$. 39. $1 \pm \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. 40. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \pm 1$.
41. $1 + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. 42. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$. 43. $\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha$.
44. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$. 45. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta$. 46. $\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta - 1$.
47. $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta$. 48. $1 \pm \sin\alpha$. [§ 78, 12 und § 97, 32.]
49. $\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. 50. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \cos\alpha$.
51. $1 + 2\cos\alpha$. [$1 + 2\cos\alpha = \frac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \ldots$]
52. $2\cos\alpha - 1$. 53. $2\sin\alpha \pm \operatorname{tg}\alpha$.
54. $\sin\alpha \pm \cos\alpha$. [§ 78, 12 und § 96.] 55. $\operatorname{tg}\alpha \pm 1$.
56. $1 \pm \operatorname{ctg}\alpha$. 57. $\sin\alpha \pm \cos\beta$. [§ 78, 12 und § 96.]
58. $2\sin\alpha \pm 1$. [51.] 59. $2\cos\alpha \pm \operatorname{ctg}\alpha$.
60. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$. [$(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \cdots$]
61. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$. 62. $1 - \sin\alpha + \cos\alpha$. 63. $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$.

10. $\cos\alpha \cos\beta$, $\sin\alpha \sin\beta$, $\sin\alpha \cos\beta$, $\cos\alpha \sin\beta$ ($\alpha > \beta$) auszudrücken durch Funktionen von a) $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$. b) $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

§ 98.

1. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$= \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$. [§ 91, III'.]

2. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$= \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$= \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

4. $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

$= \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= \sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

11. Algebraische Summen, deren Glieder Funktionen der Winkel eines Dreiecks enthalten, umzuformen.

§ 99.

α, β und γ seien die Winkel eines Dreiecks.

Zu beweisen, daß

1. a) $\sin 2\gamma = -\sin 2(\alpha+\beta)$. [$\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$
$= 2\sin(\alpha+\beta)(-\cos(\alpha+\beta)) \ldots$].

b) $\cos 2\gamma = \cos 2(\alpha+\beta)$. c) $\operatorname{tg} 2\gamma = -\operatorname{tg} 2(\alpha+\beta)$.

2. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

[$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right]\cos\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\Big]\cdot$$

3. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

4. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$.

5. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1$.

6. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

7. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

8. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma - \frac{\cos 2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

9. $\sin\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4}$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

$$\Big[\sin\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin(\beta+\gamma) + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{4} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{4}$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) \cos \left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right).]$$

10. $\sin \alpha - \cos \beta - \cos \gamma = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{4} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{4}$

$$= -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) \sin \left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

11. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. [1.]
12. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$.
13. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$.
14. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1$.
15. $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma$. [1.]
16. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.
17. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2\,(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$. [§ 92, IV$_a$; § 99, 13.]
18. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$.
19. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.
20. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = 1 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$.
21. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$.
22. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.
23. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$.
24. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2\,(1 - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)$.
25. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma = -2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.
26. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$.
27. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.
28. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.
29. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2\,\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right)$.
30. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.
31. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right)$.

32. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2} = -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

33. $\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

34. $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

35. $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

36. $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

12. Gebrauch der Hilfswinkel zur Umformung von Ausdrücken, die sich zur logarithmischen Rechnung nicht eignen.

§ 100.

a, b, c seien reelle Größen, die logarithmisch berechnet werden müssen. x zu berechnen, wenn

1. $x = a + b.$

Man schreibe $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left[\text{oder } x = b\left(\frac{a}{b} + 1\right)\right].$

a) Ist $a > b > 0$, so setzt man

†) $\frac{b}{a} = \cos\mu$, dann ist $x = a(1 + \cos\mu)$ oder

††) $x = 2a\cos^2\frac{\mu}{2}.$

b) Ist $a > 0$, $b > 0$, $a \gtrless b$, so setzt man

†) $\sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg}\mu$, dann ist $x = a(1 + \operatorname{tg}^2\mu)$ oder

††) $x = \frac{a}{\cos^2\mu}$, oder, da $a = b\operatorname{ctg}^2\mu$,

†††) $x = \frac{b}{\sin^2\mu}.$

b) Ist $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$, so setzt man

†) $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\mu$, dann ist $x = a(1 + \operatorname{tg}\mu)$ oder

$$\dagger\dagger)\ x = a\,\frac{\cos(\mu - 45^0)}{\cos\mu}\sqrt{2}\ \Big[= a\,\frac{\cos(45^0-\mu)}{\cos\mu}\sqrt{2}$$

$$= a\,\frac{\sin(45^0+\mu)}{\cos\mu}\sqrt{2}\Big];$$ oder, da $a = b \operatorname{ctg}\mu$,

$$\dagger\dagger\dagger)\ x = b\,\frac{\cos(\mu - 45^0)}{\sin\mu}\sqrt{2}\ \Big[= b\,\frac{\cos(45^0-\mu)}{\sin\mu}\sqrt{2}$$

$$= b\,\frac{\sin(45^0+\mu)}{\sin\mu}\sqrt{2}\Big].$$

Aus Gleich. †) wird μ berechnet, dann aus Gleich. ††) oder †††) x.

2. $x = a - b \left[= a\left(1 - \frac{b}{a}\right)\right]$, wie 1; nur, wenn $a > b > 0$, kann man auch setzen $\sqrt{\frac{b}{a}} = \cos\mu$ oder $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sin\mu$.

3. $x = \sqrt{a + b}$. [Ist $a > b > 0$, so setzt man $\frac{b}{a} = \cos\mu$, dann ist $x = \cos\frac{\mu}{2}\sqrt{2a}$.

Ist $a > 0$, $b > 0$, $a \gtrless b$, so setzt man $\sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg}\mu$, dann ist

$$x = \frac{\sqrt{a}}{\cos\mu} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\mu}.]$$

4. $x = \sqrt{a - b}$. [$a > b > 0$; $\frac{b}{a} = \cos\mu$; $x = \sin\frac{\mu}{2}\sqrt{2a}$.

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \cos\nu;\ x = \sin\nu\sqrt{a}$$

$$= \operatorname{tg}\nu\sqrt{b}.]$$

5. $x = \frac{a+b}{a-b}$. [$a > b > 0$; $\frac{b}{a} = \cos\mu$; $x = \operatorname{ctg}^2\frac{\mu}{2}$.

$$a > 0,\ b > 0,\ a \gtrless b;\ \sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg}\mu;\ x = \frac{1}{\cos 2\mu}.$$

$$a \gtrless 0,\ b \gtrless 0;\ \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\mu;\quad x = \operatorname{ctg}(45^0 - \mu)$$

$$= \operatorname{tg}(45^0 + \mu).]$$

6. $x = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. [5 oder 3 und 4.]

7. $x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$. $\left[a > b > 0;\ \frac{b}{a} = \cos\mu;\right.$

$$x = \left(\cos\frac{\mu}{2} + \sin\frac{\mu}{2}\right)\sqrt{2a} = 2\sqrt{a}\,\cos\left(\frac{\mu}{2} - 45^0\right)$$

$$\left. = 2\sqrt{a}\,\cos\left(45^0 - \frac{\mu}{2}\right) = 2\sqrt{a}\,\sin\left(45^0 + \frac{\mu}{2}\right).\right]$$

8. $x = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$.

$\left[\text{Wie 7.}\quad x = 2\sqrt{a}\,\sin\left(45^0 - \frac{\mu}{2}\right) = 2\sqrt{a}\,\cos\left(45^0 + \frac{\mu}{2}\right).\right]$

9. $x = a\sin\alpha + b\cos\alpha$.

$\left|\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\mu;\ x = a\frac{\sin(\alpha+\mu)}{\cos\mu} = b\frac{\sin(\alpha+\mu)}{\sin\mu}.\right|$

10. $x = \frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{a\sin\alpha - b\cos\alpha}$. [9.]

11. $x = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}$.

$\left[0 < \frac{a\cos\beta}{c} < 1;\quad \frac{a\cos\beta}{c} = \sin^2\mu;\quad x = \operatorname{tg}^2\mu\,\operatorname{tg}\beta.\right.$

$\frac{a\cos\beta}{c} > 1;\quad \frac{a\cos\beta}{c} = \frac{1}{\sin^2\mu};\quad x = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos^2\mu}.$

$\frac{a\cos\beta}{c} > 0;\quad \frac{a\cos\beta}{c} = \operatorname{tg}^2\mu;\quad x = \frac{\sin^2\mu\,\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\mu}.$

Im Dreieck ABC ist [vergl. § 63, 1]

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}$; für $\alpha < 90^0$ ist $a\cos\beta < c$;

für $\alpha > 90^0$ ist $a\cos\beta > c$.]

12. $x = \frac{a\sin\alpha + b\cos\beta}{a\cos\alpha + b\sin\beta}$. $\left[\frac{b\cos\beta}{a\cos\alpha} = \operatorname{tg}\mu;\ x = \frac{\sin(\alpha+\mu)\cos\beta}{\cos(\beta-\mu)\cos\alpha}.\right]$

13. $x = \frac{a \sin\alpha + b \sin\beta}{a \cos\alpha + b \cos\beta}$. $\left[\frac{b \sin\beta}{a \cos\alpha} = \operatorname{tg}\mu.\right]$

14. $x = \sqrt{(a+b)^2 \sin^2\frac{\gamma}{2} + (a-b)^2 \cos^2\frac{\gamma}{2}}$.

$\left[\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\mu; \quad x = \frac{a+b}{\cos\mu} \sin\frac{\gamma}{2}.\right]$

15. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, $a > b > 0$.

[a) $x = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}$

$= (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{\cos\mu}$, wo

$\frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma}{a-b} = \operatorname{tg}\mu.$

b) $x = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}} = (a+b)\cos\mu$, wo

$\frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma}{a+b} = \sin\mu.$

Ist nämlich $a > 0$, $b > 0$, so ist $(a-b)^2 > 0$; $a^2 - 2ab + b^2 > 0$; $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$; $a + b > 2\sqrt{ab}$.]

---

16. $x = [\sqrt[3]{3{,}253} + 7\sqrt[5]{2{,}2914}]\,1{,}02621.$

17. $x = \left[\frac{5\sqrt[5]{4{,}23798} + 3\sqrt[3]{1{,}34567}}{5\sqrt[5]{4{,}23798} - 3\sqrt[3]{1{,}34567}}\right] 1{,}01.$

18. $x = \sqrt[9]{75\sqrt[3]{2{,}375} + 25\sqrt[6]{0{,}3745} + 8{,}29572}.$

19. $x = 1{,}46235\sqrt[7]{45{,}25\sqrt{0{,}3757} - 21{,}125\sqrt[3]{5{,}23715}}.$

13. Gebrauch der Hilfswinkel zur Lösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 101.

Jede quadratische Gleichung läßt sich auf eine der folgenden vier Formen bringen:

$$\text{I. } x^2 + ax - b = 0, \qquad \text{II. } x^2 - ax - b = 0,$$
$$\text{III. } x^2 + ax + b = 0, \qquad \text{IV. } x^2 - ax + b = 0,$$

wo a und b absolute reelle Zahlen bedeuten.

Als Wurzeln erhält man in den einzelnen Fällen

$$\text{I. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}, \qquad \text{II. } x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b},$$

$$\text{III. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, \qquad \text{IV. } x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

In den Fällen I. und II. erhält man stets reelle Wurzeln, da $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$ nie negativ ist. In den Fällen III. und IV. erhält man nur dann reelle Wurzeln, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$, d. h. $\frac{4b}{a^2} < 1$.

$$\text{I. } x^2 + ax - b = 0.$$

$$x = \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \operatorname{tg}\mu \quad [\S\ 100,\ 3.]$$

$$x = \frac{a}{2}\left(-1 + \frac{1}{\cos\mu}\right)$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(-1 + \frac{1}{\cos\mu}\right) \qquad x_2 = \frac{a}{2}\left(-1 - \frac{1}{\cos\mu}\right)$$

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \cos\mu}{\cos\mu} \qquad x_2 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \cos\mu}{\cos\mu}$$

$$x_1 = a\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\mu}{\cos\mu} \qquad x_2 = -\,a\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\mu}{\cos\mu}$$

oder, da $a = 2\sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\mu$,

$$x_1 = \sqrt{b}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu. \qquad x_2 = -\sqrt{b}\ \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

[Probe: $x_1 x_2 = \sqrt{b}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu\,(-\sqrt{b}\ \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\mu) = -b.$

$$x_1 + x_2 = \sqrt{b}\,(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu - \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\mu) = \sqrt{b}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\mu - \cos^2\frac{1}{2}\mu}{\cos\frac{1}{2}\mu\,\sin\frac{1}{2}\mu}$$

$$= -2\sqrt{b}\,\frac{\cos\mu}{\sin\mu} = -2\sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\mu = -a.]$$

II. $x^2 - ax - b = 0.$

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \mathrm{tg}\,\mu$$

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\cos\mu}\right)$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\,\frac{\cos\mu + 1}{\cos\mu} \qquad x_2 = \frac{a}{2}\,\frac{\cos\mu - 1}{\cos\mu}$$

$$x_1 = a\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\mu}{\cos\mu} \qquad x_2 = -a\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\mu}{\cos\mu}$$

oder, da $a = 2\sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\mu$,

$$x_1 = \sqrt{b}\ \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\mu. \qquad x_2 = -\sqrt{b}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

III. $x^2 + ax + b = 0;\quad \frac{4b}{a^2} < 1.$

$$x = -\frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\mu$$

$$x = -\frac{a}{2}\,(1 \mp \cos\mu)$$

$$x_1 = -\frac{a}{2}(1 - \cos\mu) \qquad x_2 = -\frac{a}{2}(1 + \cos\mu)$$

$$x_1 = -a\,\sin^2\tfrac{1}{2}\mu \qquad x_2 = -a\,\cos^2\tfrac{1}{2}\mu$$

oder, da $a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin\mu}$,

$$x_1 = -\sqrt{b}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu. \qquad x_2 = -\sqrt{b}\ \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

$$\text{IV.}\quad x^2 - ax + b = 0;\quad \frac{4b}{a^2} < 1.$$

$$x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\mu$$

$$x = \frac{a}{2}\,(1 + \cos\mu)$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\,(1 + \cos\mu) \qquad\qquad x_2 = \frac{a}{2}\,(1 - \cos\mu)$$

$$x_1 = a\cos^2 \tfrac{1}{2}\mu \qquad\qquad x_2 = a\sin^2 \tfrac{1}{2}\mu$$

oder, da $a = \dfrac{2\sqrt{b}}{\sin\mu}$,

$$x_1 = \sqrt{b}\,\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\mu. \qquad\qquad x_2 = \sqrt{b}\,\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mu.$$

$$\text{III}'.\quad x^2 + ax + b = 0;\ \frac{4b}{a^2} > 1. \qquad \text{IV}'.\quad x^2 - ax + b = 0;\ \frac{4b}{a^2} > 1.$$

$$x = -\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right) \qquad\qquad x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \frac{1}{\cos\mu}$$

$$x = -\frac{a}{2}\,(1 + i\operatorname{tg}\mu) \qquad\qquad x = \frac{a}{2}\,(1 + i\operatorname{tg}\mu)$$

$$x = -\frac{a}{2} + i\,\frac{a}{2}\operatorname{tg}\mu \qquad\qquad x = \frac{a}{2} + i\,\frac{a}{2}\operatorname{tg}\mu$$

oder, da $\dfrac{a}{2} = \sqrt{b}\cos\mu$,

$$x = -\frac{a}{2} + i\sqrt{b}\sin\mu. \qquad\qquad x = \frac{a}{2} + i\sqrt{b}\sin\mu.$$

Übungen.

1. $x^2 + 16{,}331\,x + 3{,}54442 = 0.$
2. $x^2 - 2{,}23618\,x + 0{,}2638975 = 0.$
3. $x^2 + 211{,}11\,x - 2468{,}8642 = 0.$
4. $x^2 - 0{,}8905\,x - 12{,}452223 = 0.$
5. $124875\,x^2 - 265264\,x + 55696 = 0.$
6. $28125\,x^2 + 30850\,x - 10472 = 0.$

14. Goniometrische Gleichungen.

§ 102.

Enthält eine Gleichung außer bekannten Größen trigonometrische (goniometrische) Funktionen eines unbekannten Winkels (Funktionen des einfachen, des doppelten, des halben unbekannten Winkels, Funktionen des $n$fachen des unbekannten Winkels, wo n eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, Funktionen der Summe, der Differenz aus dem unbekannten und einem bekannten Winkel oder aus einem Vielfachen des unbekannten und einem Vielfachen eines bekannten Winkels), so heißt sie eine goniometrische Gleichung mit einer Unbekannten. Man löst eine solche Gleichung im allgemeinen, indem man alle Funktionen auf eine Funktion eines bestimmten Winkelausdrucks zurückführt und dann die Gleichung algebraisch nach dieser Funktion auflöst (d. h. die Brüche, Klammern, Wurzeln fortschafft, die Glieder mit der Unbekannten auf die eine Seite, die übrigen Glieder auf die andere Seite bringt u. s. w.). Oft gelingt es auch, die Gleichung in zwei oder mehrere einfachere Gleichungen zu zerlegen, indem man die Gleichung so umformt, daß die eine Seite gleich Null und die andere Seite ein Produkt ist.

§ 103.

Goniometrische Gleichungen mit **einer** Unbekannten.

Gesucht die Werte von φ zwischen 0^0 und 180^0, welche den folgenden Gleichungen genügen.

1. $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. $[\varphi_1 = 30^0;\ \varphi_2 = 150^0.]$
2. $\sin(\varphi - 45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. 3. $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
4. $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. $\left[2\varphi = \begin{cases}30^0\\330^0\end{cases};\ \varphi = \begin{cases}15^0\\165^0\end{cases}\right]$.
5. $\cos(\varphi - 45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. $\left[\varphi - 45^0 = \begin{cases}45^0\\-45^0\end{cases};\ \varphi = \begin{cases}90^0\\0^0\end{cases}\right]$.
6. $\cos(\varphi - 30^0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. 7. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$.
8. $\operatorname{tg}(\varphi - 60^0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. 9. $\operatorname{tg}(\varphi + 75^0) = \sqrt{3}$.
10. $\operatorname{ctg}(\varphi - 45^0) = -1$. $\left[\varphi - 45^0 = \begin{cases}135^0\\-45^0\end{cases};\ \varphi = \begin{cases}180^0\\0^0\end{cases}\right]$.
11. $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. 12. $\operatorname{ctg}(\varphi + 45^0) = \sqrt{3}$.

---

13. $2 - \sin\varphi = \dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$. [§ 82, I.] 14. $\dfrac{4}{\cos^2\varphi} - 5\operatorname{tg}^2\varphi = 1$.

15. $\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{ctg}\varphi = 3:1$. 16. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi = 0$.

17. $\sin\varphi - \cos\varphi = 0$.

[1) $\sin\varphi = \cos\varphi$
$\operatorname{tg}\varphi = 1$
$\varphi = 45^0$.

2) $\sin\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$
$\sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$
$\sin\varphi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, da $0^0 \leq \varphi \leq 180^0$,
$\varphi = \begin{cases}45^0 \\ 135^0\end{cases}$. Die Probe ergiebt, daß von diesen beiden Werten nur 45^0 genügt. Der Wert 135^0 genügt der Gleichung 18.]

18. $\sin\varphi + \cos\varphi = 0$. 19. $\sin\varphi - \cos\varphi\sqrt{3} = 0$.

20. $\sin\varphi\sqrt{3} + \cos\varphi = 0$. 21. $\cos\varphi : \operatorname{tg}\varphi = 3:2$.

22. $\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} = 2{,}5$. 23. $\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)\sqrt{3} = 4$.

24. $\operatorname{ctg}\varphi - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg}\varphi$.

25. $\sin\varphi : \operatorname{tg}\varphi = 1:2$.

[$2\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$
$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$
$2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi = 0$
$\sin\varphi\,(2\cos\varphi - 1) = 0$
$\sin\varphi = 0$ $\quad 2\cos\varphi - 1 = 0$
$\varphi_1 = 0^0$ $\quad \cos\varphi = \frac{1}{2}$
$\varphi_2 = 180^0$ $\quad \varphi_3 = 60^0$.]

26. $\cos\varphi : \operatorname{ctg}\varphi = 1:2$.

27. $\sin\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 1$.

[$\sin\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - 1 = 0$
$\sin\varphi(1+\cos\varphi) - (1+\cos\varphi) = 0$
$(1+\cos\varphi)(\sin\varphi - 1) = 0 \ldots$

28. $\sin\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 1$.

29. $\sin\varphi - \cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi = 1$.

30. $2\sin\varphi + 2\cos\varphi - \operatorname{ctg}\varphi = 1$.

31. $2\sin^2\varphi - \sin\varphi\operatorname{tg}\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi = 0$.

32. $\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi$. 33. $\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi$.

34. $\cos(60^0 - \varphi) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\sin\varphi$. [§ 85 und 86.]

35. $\sin(30^0 + \varphi) = 2\sin 30^0\cos\varphi$.

36. $\sin(45^0 - \varphi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin\varphi$.

37. $\sin(\varphi + 30^0) - \sin(\varphi - 30^0) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi$.

38. $\cos(\varphi - 45^0) - \cos(\varphi + 45^0) = \operatorname{tg}\varphi$.

39. $\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi = 1$. [§ 91.] 40. $\cos \varphi + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$.

41. $\sin 2\varphi + \sin \varphi = 0$. 42. $\cos \varphi + \cos \frac{\varphi}{2} = -1$.

43. $\cos 2\varphi \pm \sin \varphi = 1$. 44. $\cos \varphi + \sin \frac{\varphi}{2} = 1$.

45. $\cos 4\varphi \pm \cos 2\varphi = -1$.

46. $\sin(\varphi + 45^0) - \sin(\varphi - 45^0) + \sin(2\varphi - 45^0)$
$- \sin(2\varphi + 45^0) = \sqrt{2}$.

47. $\sin 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi = 0$. 48. $\operatorname{tg} 2\varphi - 3 \operatorname{tg} \varphi = 0$.

49. $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2}$. $\left[\begin{array}{r} 2 \sin \varphi \cos \varphi = 1 \\ \sin 2\varphi = 1 \end{array}\right]$. 50. $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{4}$.

51. $\sin(\varphi + 15^0) \cos(\varphi + 15^0) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

52. $\sin(\varphi + 30^0) \cos(\varphi + 30^0) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

53. $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = 2$. 54. $\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{3}$.

55. $(\sin \varphi - \cos \varphi)^2 = \sin 2\varphi$.

56. $(\sin \varphi + \cos \varphi)^2 = 2 \sin 2\varphi$.

57. $\sin \varphi \pm \cos \varphi = 0$. [1) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \pm 2 \sin \varphi \cos \varphi = 0$;
$1 \pm \sin 2\varphi = 0$.
2) $\sin \varphi = \mp \cos \varphi$; $\sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi$; $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$;
$\cos 2\varphi = 0$. 3) $\operatorname{tg} \varphi = + 1$.]

58. $\sin \varphi + \cos \varphi = 1$. 59. $\sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{2}$.

60. $\sin 2\varphi + 2 \sin \varphi - \cos \varphi = 1$.

61. $\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sin \varphi - \cos \varphi = 1$.

62. $\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + \sin \varphi - \cos \varphi = 1$.

63. $\sin 2\varphi + \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi = 1$.

64. $\sin(30^0 - \varphi) \cos \varphi = \frac{1}{8}(\cos 2\varphi - 2 \sin^2 \varphi)$.

65. $\cos(30^0 - \varphi) \cos \varphi = \frac{1}{8}\sqrt{3}\,(5 \cos 2\varphi + 6 \sin^2 \varphi)$.

---

66. $\sin 2\varphi + 2 \sin^2 \varphi = 1$. [§ 92.]

67. $\sqrt{3} \sin 2\varphi - 2 \sin^2 \varphi = -1$.

68. $8 \sin^2 \varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 4$.

69. $4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi = 2$.

70. $\sin(30^0 \pm \varphi) \cos \varphi = \frac{1}{4}$.

71. $\dfrac{\cos\varphi + \cos 45^0}{\sin\varphi + \sin 45^0} = 2\cos\dfrac{\varphi + 45^0}{2}$. [§ 96.]

72. $\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi = 0.$ $\Big[(\sin 2\varphi + \sin\varphi) + (\cos 2\varphi + \cos\varphi) = 0;\ 2\sin\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} + 2\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0;$

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{3\varphi}{2}\right) = 0.\Big]$$

73. $\sin 3\varphi + \cos 3\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi = 0.$

74. $\sin 4\varphi + \cos 4\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi = 0.$

75. $\sin 4\varphi + \cos 4\varphi + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 0.$

76. $\cos(75^0 + \varphi)\sin(75^0 - \varphi) = \frac{1}{2}$. [§ 98.]

77. $\sin(75^0 + \varphi)\sin(45^0 + \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

78. $\cos(45^0 + \varphi)\cos(15^0 + \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

79. $\operatorname{tg}(30^0 + \varphi)\operatorname{tg}(30^0 - \varphi) = \frac{1}{3}$.

80. $\operatorname{tg}(75^0 + \varphi)\operatorname{tg}(15^0 + \varphi) = -\frac{1}{3}$.

81. $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c.$

$\Big[\sin\varphi + \dfrac{b}{a}\cos\varphi = \dfrac{c}{a}$

†) $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\mu$

$\sin\varphi + \operatorname{tg}\mu\cos\varphi = \dfrac{c}{a}$

††) $\sin(\varphi + \mu) = \dfrac{c\cos\mu}{a}.\Big]$

Diese Gleichung läßt sich auch lösen unter Anwendung der Formeln § 82, 2 oder § 83, 4 u. 5 oder § 91, 3 u. 4 oder § 92, 1.

82. $10000\sin\varphi + 7002{,}2\cos\varphi = 11064.$

83. $20000\sin\varphi + 7402{,}6\cos\varphi = 19377.$

84. $\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{3}.$

85. $\cos 2\varphi - \sqrt{3}\sin 2\varphi = \sqrt{3}.$

86. $\sin 2\varphi + \sqrt{3}\cos 2\varphi = \sqrt{3}.$

87. $\cos(60^0 + \varphi)\cos\varphi = \frac{1}{2}.$

88. $\sin\varphi + \cos\varphi = 0.$

89. $\sin\varphi \pm \cos\varphi = 1.$

90. $a\sin^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi = 0.$ $[a\operatorname{tg}^2\varphi + b\operatorname{tg}\varphi + c = 0.]$

91. $a\sin^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi = d.$

$[a\cdot\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) + b\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi + c\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) = d$

$b\sin 2\varphi + (c - a)\cos 2\varphi = 2d - a - c.]$

§ 104.

Goniometrische Gleichungen mit zwei Unbekannten.*)

Gesucht die Werte von φ und ψ zwischen 0^0 und 180^0, welche den folgenden Gleichungen genügen.

1. I. $\varphi + \psi = \alpha$ $\qquad \alpha = 60^0,$

II. $\sin\varphi + \sin\psi = a.$ $\qquad a = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$

Da aus Gleichung I. die Summe der beiden gesuchten Winkel φ und ψ bekannt ist, so kann man die Winkel leicht finden, wenn man noch die Differenz derselben berechnen kann. Hierzu muß Gleichung II. so umgeformt werden, daß sie nur noch Funktionen der Summe und der Differenz der beiden Winkel enthält. Dies geschieht nach § 96. Dann ist

$$\text{I. } \varphi + \psi = \alpha$$

$$\text{II. } 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = a$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = a$$

$$\dagger)\ \cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Aus Gleich. †) ergiebt sich $\frac{\varphi-\psi}{2}$, aus I. $\frac{\varphi+\psi}{2}$; aus $\frac{\varphi+\psi}{2}$ und $\frac{\varphi-\psi}{2}$ findet man durch Addition und Subtraktion φ und ψ.

---

*) Es wird vorausgesetzt, daß außer den Funktionen von 45^0, 30^0 und 60^0 auch die von 15^0 und $22^0\,30'$ abgeleitet sind. Es ist

$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$\cos 15^0 = \sin 75^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$
$$\operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{ctg} 75^0 = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$
$$\operatorname{ctg} 15^0 = \operatorname{tg} 75^0 = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3};$$
$$\sin 22^0\,30' = \cos 67^0\,30' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$
$$\cos 22^0\,30' = \sin 67^0\,30' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$\operatorname{tg} 22^0\,30' = \operatorname{ctg} 67^0\,30' = \sqrt{2}-1,$$
$$\operatorname{ctg} 22^0\,30' = \operatorname{tg} 67^0\,30' = \sqrt{2}+1.$$

Außerdem wird bei Umformungen von Wurzelausdrücken Gebrauch gemacht von der aus der Arithmetik bekannten Formel

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\sin 30^0} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}),$$

$$\frac{\varphi-\psi}{2} = \begin{cases} 15^0 \\ -15^0 \end{cases}$$

$$\frac{\varphi-\psi}{2} = 15^0 \qquad\qquad \frac{\varphi-\psi}{2} = -15^0$$

$$\frac{\varphi+\psi}{2} = 30^0 \qquad\qquad \frac{\varphi+\psi}{2} = 30^0$$

$$\begin{cases}\varphi_1 = 45^0 \\ \psi_1 = 15^0\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}\varphi_2 = 15^0 \\ \psi_2 = 45^0.\end{cases}$$

2. $\varphi + \psi = 120^0$
$\cos\varphi + \cos\psi = \sqrt{0{,}75}.$

3. $\varphi - \psi = 60^0$
$\cos\varphi + \cos\psi = -1{,}5.$

4. $\varphi - \psi = 30^0$
$\cos\varphi - \cos\psi = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6}).$

5. $\varphi - \psi = 60^0$
$\sin\varphi - \cos\psi = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$

I. $\varphi + \psi = \alpha = 150^0$
II. $\sin^2\varphi + \sin^2\psi = a = \frac{1}{4}(4 - \sqrt{3}).$

[I. $\varphi + \psi = \alpha$
II. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi) = a$

$$\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2 - 2a$$
$$2\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi) = 2 - 2a$$
$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{1-a}{\cos\alpha}.]$$

7. $\varphi - \psi = 30^0$
$\cos^2\varphi + \cos^2\psi = \frac{1}{4}(4 + \sqrt{3}).$

8. $\varphi + \psi = 195^0$
$\sin^2\varphi - \sin^2\psi = \frac{1}{4}\sqrt{2(2 - \sqrt{3})}$

9. $\varphi + \psi = 195^0$
$\sin^2\varphi + \cos^2\psi = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{3}).$

10. $\varphi + \psi = 150^0$
$\sin^2\varphi - \cos^2\psi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}.$

11. I. $\varphi + \psi = \alpha = 135^0$
II. $\sin\varphi\sin\psi = a = \frac{1}{8}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}).$

[II. $\frac{1}{2}\{\cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi)\} = a$

$$\cos(\varphi-\psi) = 2a + \cos\alpha.]$$

12. $\varphi + \psi = 300^0$
$\cos\varphi\cos\psi = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}).$

13. $\varphi - \psi = 120^0$
$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = \sqrt{3} - 2.$

14. $\varphi + \psi = 180^0$

$\sin\varphi \cos\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{1}{2}.$

15. $\varphi + \psi = 240^0$

$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \sqrt{3} - 2.$

16. $\varphi + \psi = 120^0$

$\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \sqrt{3} - 2.$

17. $\varphi - \psi = 60^0$

$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi + \psi}{2} = 2 + \sqrt{3}.$

18. I. $\varphi + \psi = \alpha = 75^0$

II. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = a = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{3}).$

$$\left[\text{II.}\ \frac{\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\cos\psi} = a\right.$$
$$\frac{2\sin(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)} = a$$
$$\left.\frac{2\sin\alpha}{\cos(\varphi - \psi) + \cos\alpha} = a.\right]$$

19. $\varphi - \psi = 120^0$

$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = -3 + \sqrt{3}.$

20. I. $\varphi + \psi = \alpha = 150^0$

II. $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = a = \sqrt{3}.$

$$\left[\text{II.}\ \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{a+1}{a-1}\right.$$
$$\frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{a+1}{a-1}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{a+1}{a-1}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{a+1}{a-1}$$
$$\left.\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{a+1}{a-1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\right]$$

21. $\varphi - \psi = 30^0$

$\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}).$

22. $\varphi + \psi = 150^0$

$\dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi} = 1 - \sqrt{3}.$

23. I. $\sin\varphi + \sin\psi = a = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

II. $\cos\varphi + \cos\psi = b = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}.$

$$\left[\text{I.}\ 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = a\right.$$

$$\text{II. } 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = b$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{a}{b}$$

$$\text{I. } \cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}\Big]$$

24.
$$\sin\varphi - \sin\psi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

25.
$$\sin\varphi + \cos\psi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$\cos\varphi + \sin\psi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

26.
$$\sin\varphi - \cos\psi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-3\sqrt{2})$$
$$\cos\varphi - \sin\psi = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+3\sqrt{2}).$$

27.
$$\text{I. } \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = a = 2$$
$$\text{II. } \operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\psi = b = 2\,(1+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}).$$

$$[\text{I. } \sin(\varphi+\psi) = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$\text{II. } \sin(\varphi+\psi) = b\sin\varphi\sin\psi$$

$$\text{I. } \sin(\varphi+\psi) = \tfrac{1}{2}a\cos(\varphi-\psi) + \tfrac{1}{2}a\cos(\varphi+\psi)$$
$$\text{II. } \sin(\varphi+\psi) = \tfrac{1}{2}b\cos(\varphi-\psi) - \tfrac{1}{2}b\cos(\varphi+\psi)$$

$$\text{I. } b\sin(\varphi+\psi) = \tfrac{1}{2}ab\cos(\varphi-\psi) + \tfrac{1}{2}ab\cos(\varphi+\psi)$$
$$\text{II. } a\sin(\varphi+\psi) = \tfrac{1}{2}ab\cos(\varphi-\psi) - \tfrac{1}{2}ab\cos(\varphi+\psi)$$

$$(b-a)\sin(\varphi+\psi) = ab\cos(\varphi+\psi)$$

$$\dagger)\ \operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{ab}{b-a}$$

$$(a+b)\sin(\varphi+\psi) = ab\cos(\varphi-\psi)$$

$$\dagger\dagger)\ \cos(\varphi-\psi) = \frac{a+b}{ab}\sin(\varphi+\psi).]$$

28.
$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\psi = \sqrt{6}\,(2+\sqrt{3})$$
$$\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = \sqrt{6}\,(2-\sqrt{3}).$$

29.
$$\text{I. } \sin\varphi\sin\psi = a = \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{3})\sqrt{6}$$
$$\text{II. } \cos\varphi\cos\psi = b = \tfrac{1}{8}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

$$[\dagger)\ \cos(\varphi+\psi) = b-a$$
$$\dagger\dagger)\ \cos(\varphi-\psi) = b+a.]$$

30.
$$\sin\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})$$
$$\cos\varphi\sin\psi = \tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3}).$$

C. Berechnung von Dreiecken.

1. Berechnung von Dreiecken aus einfachen Stücken mit Hilfe der goniometrischen Formeln.

§ 105.

Übungen.

1. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei k m, die zu ihr gehörige Höhe l m lang. Wie groß sind die übrigen Stücke?

$$k = 353{,}275; \quad l = 154{,}025.$$

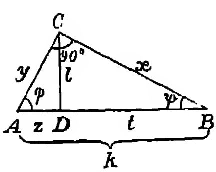

Fig. 51.

Erste Auflösung. In dem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 90^0$, die Hypotenuse AB gleich k m und die zu ihr gehörige Höhe CD gleich l m.

Die größere Kathete BC möge gleich x m, die Kathete AC gleich y m, $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$, der Hypotenusenabschnitt AD gleich z m, BD gleich t m und der Flächeninhalt gleich u qm sein.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB ergiebt sich

$$1)\ x = k \cos \psi,$$

aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck BDC

$$2)\ l = x \sin \psi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und ψ können diese berechnet werden.

Durch Elimination von x (indem man die beiden Gleichungen mit einander multipliziert) erhält man

$$l = k \cos \psi \sin \psi,$$
$$l = \tfrac{1}{2} k \sin 2\psi,$$
$$\sin 2\psi = \frac{2l}{k}; \qquad \text{hieraus wird } \psi \text{ berechnet.}$$

Ferner ist

1)	$x = k \cos \psi$;	"	"	x	"	;
	$\varphi = 90^0 - \psi$;	"	"	φ	"	;
	$y = k \sin \psi$;	"	"	y	"	;
	$u = \tfrac{1}{2} k l$;	"	"	u	"	;
	$z = l \operatorname{ctg} \varphi$;	"	"	z	"	;
	$t = l \operatorname{ctg} \psi$;	"	"	t	"	.

$$\sin 2\psi = \frac{2l}{k}.$$

$$\log \sin 2\psi = \log 2 + \log l - \log k$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= & &0{,}30\,103\\
\log l &= & &2{,}18\,759\\
-\log k &= -2{,}54\,811 &=\ &0{,}45\,189 - 3\\
\log \sin 2\psi &= & &0{,}94\,051 - 1
\end{aligned}$$

$$2\psi = \begin{cases} 60^0\ 41'\ 25'' \\ 119^0\ 18'\ 35'' \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} 30^0\ 20'\ 43'' \\ 59^0\ 39'\ 18''. \end{cases}$$

Von diesen beiden Werten genügt nur der erstere, da ψ der kleineren Kathete gegenüberliegt, also kleiner als 45^0 sein muß; folglich ist

$$\psi = 30^0\ 20'\ 43''\ \text{u. s. f.}$$

Aus 1) und 2) hätte man auch ψ eliminieren können, da $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$.

Zweite Auflösung.

$$\begin{aligned}
1)\quad x^2 + y^2 &= k^2\\
2)\quad xy &= kl\\
(x+y)^2 &= k^2 + 2kl\\
x + y &= \sqrt{k(k+2l)}\\
x - y &= \sqrt{k(k-2l)}\\
x &= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{k(k+2l)} + \sqrt{k(k-2l)}\right]\\
y &= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{k(k+2l)} - \sqrt{k(k-2l)}\right].
\end{aligned}$$

Dritte Auflösung.

$$\begin{aligned}
1)\quad tz &= l^2\\
2)\quad t + z &= k\\
2)\quad t^2 + z^2 + 2tz &= k^2\\
1)\quad 4tz &= 4l^2\\
(t-z)^2 &= k^2 - 4l^2\\
t - z &= \sqrt{(k+2l)(k-2l)}\quad [t > z]\\
t + z &= k\\
t &= \tfrac{1}{2}\left[k + \sqrt{(k+2l)(k-2l)}\right]\\
z &= \tfrac{1}{2}\left[k - \sqrt{(k+2l)(k-2l)}\right].
\end{aligned}$$

2. Die Differenz der Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse sei gleich k m, der größere der beiden spitzen Winkel gleich η; es sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Erste Auflösung. In dem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 90^0$, CD das von C auf AB gefällte Lot, BD — AD gleich k m und der größere spitze Winkel $\angle BAC = \eta$, folglich $\angle ABC = 90^0 - \eta$ und $\angle BCD = \eta$.

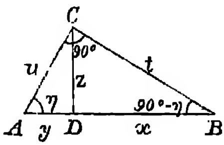

Fig. 52.

Die Projektion BD sei gleich x m, AD gleich y m, die zur Hypotenuse gehörige Höhe CD gleich z m, Seite BC gleich t m und Seite AC gleich u m.

Es ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} 1) & x - y = k \\ 2) & \quad y = z \operatorname{ctg} \eta \\ 3) & \quad x = z \operatorname{tg} \eta \end{array}$$

$$z \operatorname{tg} \eta - z \operatorname{ctg} \eta = k$$

$$z = \frac{k}{\operatorname{tg} \eta - \operatorname{ctg} \eta} = \frac{k \cos \eta \sin \eta}{\sin^2 \eta - \cos^2 \eta} = \frac{k\, 2 \sin \eta \cos \eta}{-2(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta)}$$

$$= \frac{k \sin 2\eta}{-2 \cos 2\eta} = -\frac{k}{2} \operatorname{tg} 2\eta$$

$$z = \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta).$$ Hieraus wird z berechnet.

Aus 2) und 3) findet man y und x:

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta) \operatorname{ctg} \eta \quad \text{und} \quad x = \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta) \operatorname{tg} \eta.$$

Folglich ist $x + y = \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta)\,(\operatorname{tg} \eta + \operatorname{ctg} \eta)$

$$= \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta) \frac{\sin^2 \eta + \cos^2 \eta}{\cos \eta \sin \eta} = \frac{k \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta)}{\sin 2\eta} = \frac{k}{\cos(180^0 - 2\eta)}.$$

Ferner findet man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC

$$\frac{z}{t} = \sin(90^0 - \eta) = \cos \eta \qquad \frac{z}{u} = \sin \eta$$

$$t = \frac{z}{\cos \eta} \qquad u = \frac{z}{\sin \eta}$$

$$t = \frac{k \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta)}{2 \cos \eta} \qquad u = \frac{k \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta)}{2 \sin \eta}.$$

Aus 2) und 3) hätte man auch z eliminieren können; dann würde man erhalten haben

$$\begin{array}{ll} 1') & x - y = k \\ 2') & \dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{ctg} \eta}{\operatorname{tg} \eta} = \operatorname{ctg}^2 \eta \end{array}$$

2′) $\quad y = x \operatorname{ctg}^2 \eta$, eingesetzt in 1′),

$$x - x \operatorname{ctg}^2 \eta = k$$

$$x = \frac{k}{1 - \operatorname{ctg}^2 \eta} = \frac{k \sin^2 \eta}{\sin^2 \eta - \cos^2 \eta} = \frac{k \sin^2 \eta}{- \cos 2\eta}$$

$$x = \frac{k \sin^2 \eta}{\cos (180^0 - 2\eta)}.$$

Diesen Ausdruck kann man auch auf die Form des oben für x erhaltenen Ausdruckes bringen; denn es ist

$$x = k \frac{2 \sin \eta \sin \eta \cos \eta}{2 \cos (180^0 - 2\eta) \cos \eta} = \frac{k}{2} \frac{\sin 2\eta}{\cos (180^0 - 2\eta)} \operatorname{tg} \eta$$

$$= \frac{k}{2} \frac{\sin (180^0 - 2\eta)}{\cos (180^0 - 2\eta)} \operatorname{tg} \eta$$

$$x = \frac{k}{2} \operatorname{tg} (180^0 - 2\eta) \operatorname{tg} \eta.$$

Aus 2′) folgt

$$y = \frac{k \sin^2 \eta}{\cos (180^0 - 2\eta)} \operatorname{ctg}^2 \eta = \frac{k \cos^2 \eta}{\cos (180^0 - 2\eta)}; \text{ also}$$

$$x + y = \frac{k}{\cos (180^0 - 2\eta)} (\sin^2 \eta + \cos^2 \eta) = \frac{k}{\cos (180^0 - 2\eta)}.$$

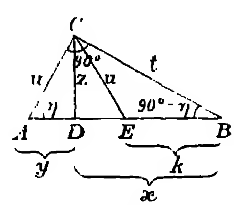

Fig. 53.

Zweite Auflösung. Trägt man AD auf BD von D aus ab bis E und verbindet E mit C, dann ist BE = BD − AD = k m, ∠ CED = η, ∠ CEB = $180^0 - \eta$, ∠ ECB = $\eta - (90^0 - \eta) = 2\eta - 90^0$ und CE = CA = u m, folglich ist nach dem Sinussatze

$$t : k = \sin (180^0 - \eta) : \sin (2\eta - 90^0),$$

$$t : k = \sin \eta \qquad : \cos (180^0 - 2\eta),$$

$$t = \frac{k \sin \eta}{\cos (180^0 - 2\eta)}.$$

$$u : k = \sin (90^0 - \eta) : \sin (2\eta - 90^0),$$

$$u : k = \cos \eta \qquad : \cos (180^0 - 2\eta),$$

$$u = \frac{k \cos \eta}{\cos (180^0 - 2\eta)}.$$

Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC ergiebt sich

$$x = t \cos(90^0 - \eta), \qquad y = u \cos\eta,$$

$$x = \frac{k \sin^2\eta}{\cos(180^0 - 2\eta)}; \qquad y = \frac{k \cos^2\eta}{\cos(180^0 - 2\eta)};$$

$$z = u \sin\eta = \frac{k \cos\eta \sin\eta}{\cos(180^0 - 2\eta)} = \frac{k \sin 2\eta}{2\cos(180^0 - 2\eta)} = \frac{k \sin(180^0 - 2\eta)}{2\cos(180^0 - 2\eta)}$$

$$= \frac{k}{2} \operatorname{tg}(180^0 - 2\eta).$$

Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus

3) F, c. (55,44; 17).
4) F, h_c. (314,15; 15,3246).
5) F, α. (2084,94; $69^0\,23'\,25''$).

6) $c + a$, β. (72,25; $44^0\,45'\,38''$).
7) $c - a$, α. (100; $47^0\,55'\,30''$).
8) $c + a$, b. (100; 30).
9) $c - a$, b. (10; 30).
10) $a + h_c$, α. (837,55; $56^0\,45'\,38''$).
11) $a - p$, β. (162,74; $41^0\,6'\,44''$).
12) $a + p$, h_c. (1086,2; 434,48).
13) $a - p$, h_c. (3,6; 9,6).
14) $a + b$, c. (29,75; 22,25). [$\sin\varphi + \cos\varphi = \pm\sqrt{1 + \sin 2\varphi}$.]
15) $a + b + c$, α. (870; $86^0\,3'$).
16) $a + b - c$, α. (60; $75^0\,8'\,14''$).
17) $a + b + c$, h_c. (240; 14,8672).
18) $a + b - c$, h_c. (30; 31,15).

19) $c + a$, p. (81; 28,8).
20) $p - q$, a. (162,112; 780).
21) $a + p$, c. (109,762; 84,875).
22) $a + b$, h_c. (252,75; 18,69).
23) $p^2 - q^2$, F. (7; 6).

24) a, $a^2 = c\,h_c$. (a = 86,976).
25) a, $b^2 = c\,h_c$. (a = 322,14).
26) a, $h_c^2 = bq$. (a = 620,27).

Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen aus

27) s, γ. (99; $106^0\,15'\,37''$).
28) $2a - c$, γ. (144; $32^0\,31'\,13''$).
29) $c + h_a$, α. (1206,96; $26^0\,47'\,6''$).
30) $a + h_c$, $c + h_a$. (245; 354,827).
31) $2a + c$, h_c. (2312; 476).

Einen Rhombus zu berechnen aus

32) $a + h$, α. (400; $46^0\,23'\,44''$).
33) $e - h$, α. (32; $73^0\,44'\,26''$).
34) $e + f$, a. (210; 75).
35) $e - f$, a. (50; 125).

Ein Rechteck zu berechnen aus

36) $e + a$, $\angle$(ea). (25,6; $14^0\,15'$).
37) $e + a$, b. (40; 12).

38) Wie groß sind die Radien zweier Kreise, deren Mittelpunktsstrecke gleich a m ist, wenn die äußeren Tangenten den Winkel α, die inneren den Winkel β mit einander bilden? $a = 300$; $\alpha = 3^0\ 49'\ 14''$; $\beta = 69^0\ 2'\ 14''$.

39) Zwei von einem Punkte eines Kreises, dessen Halbmesser a m beträgt, ausgehende Sehnen verhalten sich wie b : c, die Summe der (kleineren) zugehörigen Mittelpunktswinkel ist gleich α; wie groß sind diese Mittelpunktswinkel und die Sehnen?

$$a = \sqrt{3} - \sqrt{2};\ \alpha = 240^0;\ b : c = (\sqrt{3} + 2) : (\sqrt{3} + 1).$$

40) Die Halbmesser zweier einander schneidenden Kreise verhalten sich wie m : n, die Summe der Winkel, unter welchen die gemeinschaftliche Sehne von den beiden Mittelpunkten aus erscheint, ist gleich α; wie groß sind diese Winkel?

$$m : n = (1 + \sqrt{3}) : 1;\ \alpha = 120^0.$$

Wie groß sind die Halbmesser, und wie groß ist die Mittelpunktsstrecke, wenn die gemeinschaftliche Sehne gleich k cm ist? $k = 10$.

§ 106.

Übungen.

1. Die Übungen § 69, 6 bis 15, welche dort unter Anwendung des Sinussatzes gelöst sind, ohne diesen mit Hilfe der entstandenen rechtwinkligen Dreiecke zu lösen und den für die Unbekannte jeder Aufgabe sich ergebenden Ausdruck auf die früher für ihn gefundene für logarithmische Berechnung geeignetere Form zu bringen.

Bezeichnet man z. B. in § 69, Übung 6, die Spitze der Säule mit S, den Fuß mit F, den dem Fuße näher gelegenen Punkt mit P_1, den anderen mit P_2, und ist P_1P_2 gleich x m, $SP_1 = y$ m, $FP_1 = z$ m, so ist

a) $$y = \frac{a}{\sin\alpha},\quad x = \frac{y \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta}\ \text{(Sinussatz)};$$

folglich $$x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

b) $$x + z = a \operatorname{ctg}\beta,\quad z = a \operatorname{ctg}\alpha;$$

folglich $$x = a \operatorname{ctg}\beta - a \operatorname{ctg}\alpha = a(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)$$
$$= a\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = a\,\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

2. Es soll die Entfernung zweier Punkte A und B bestimmt werden. Hierzu mißt man eine Strecke CD gleich a m, welche mit A und B in derselben Ebene liegt und die Gerade AB nicht schneidet, und in A und B die Winkel $CAD = \alpha$, $BAD = \beta$, $ABC = \gamma$, $CBD = \delta$. (Hansensche Aufgabe.) $a = 999{,}15$; $\alpha = 36^0\ 30'$; $\beta = 42^0\ 15'$; $\gamma = 50^0\ 45'$; $\delta = 25^0\ 30'$.

[Man bezeichne $\angle$ ADC mit φ, $\angle$ BCD mit ψ; Strecke AC sei y m, BD z m lang. Man drücke y aus dem Dreieck ABC durch x und die Winkel und aus dem Dreieck ACD durch a und die Winkel aus, setze die für y erhaltenen Ausdrücke einander gleich und löse die erhaltene Gleichung nach x auf. Ebenso drücke man z aus den Dreiecken ABD und BCD durch x bezw. a und die Winkel aus, eliminiere z und löse die erhaltene Gleichung nach x auf. Setzt man die beiden für x erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man einen Wert für $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$; außerdem ist $\varphi + \psi = \beta + \gamma$. § 104, 20.]

3. Drei Punkte A, B und C liegen auf einer geraden Linie, B zwischen A und C; die beiden Punkte A und B sind a m von einander entfernt, die Punkte B und C b m. Wie weit ist ein außerhalb dieser Geraden gelegener Punkt D von A, B und C entfernt, wenn von ihm aus AB unter dem Winkel α, BC unter dem Winkel β erscheint? a = 850; b = 950; $\alpha = 51^0\ 53'\ 41''$; $\beta = 36^0\ 57'\ 30''$. [Man drücke BD aus den Dreiecken DBA und DBC aus durch AB, bezw. BC und die Winkel und berücksichtige, daß $\angle A + C = 180^0 - (\alpha + \beta)$. § 104, 20.]

4. Es sind drei Punkte A, B und C der Lage nach gegeben, AB = a m, BC = b m und $\angle$ ABC = α; in einem Punkte D, der in der Ebene der drei gegebenen Punkte liegt, auf der dem Punkte B entgegengesetzten Seite von AC, sind die Winkel ADB = β und CDB = γ gemessen. Wie weit ist D von A, B und C entfernt? (Pothenotsche Aufgabe.) a = 2575; b = 1256; $\alpha = 135^0\ 45'$; $\beta = 12^0\ 29'\ 54''$; $\gamma = 10^0\ 10'\ 45''$. [Lösung wie 3; es ist jedoch $\angle A + C = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$.]

5. Zwei Orte A und B (Stockholm und Kap der guten Hoffnung) liegen unter demselben Meridian; die nördliche geographische Breite von A ist gleich α, die südliche von B gleich β. An diesen beiden Orten sind zu derselben Zeit die Zenithdistanzen γ bez. δ eines Gestirnes (Mars) beobachtet, als es kulminierte; die Zenithdistanz in A war südlich, in B nördlich. Es soll die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunkte der Erde, deren Radius a Meilen beträgt, berechnet werden. $\alpha = 59^0\ 20'\ 31''$; $\beta = 33^0\ 54'\ 56''$; $\gamma = 68^0\ 14'$; $\delta = 25^0\ 2'$; a = 859.

2. Berechnung von Dreiecken aus beliebigen Stücken (mit Hilfe des Radius des umbeschriebenen Kreises).

§ 107.

1. Gegeben der Radius des umbeschriebenen Kreises r und die Winkel α, β und γ; gesucht [die Ausdrücke für die folgenden Größen sind 1) in solche Form zu bringen, daß sie für logarithmische Berechnung möglichst geeignet sind, 2) in solche Form, daß sie Funktionen von $\alpha + \beta$ oder γ und von $\alpha - \beta$ enthalten]

a) a. [§ 57, 2 oder 3.] b) b. c) c.

d) $a + b$. $\left[a + b = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right.$

$$\left. = 4r\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\right]$$

e) $a - b$. f) $a^2 - b^2$. $[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).]$

g) s. $\left[s = \frac{1}{2}(a + b + c) = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\right.$

$$= 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \quad [\S\ 99,\ 2.]$$

$$= 2r\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\left. = 2r\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}.\right]$$

h) $s - c$. i) ab. $\left[ab = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\right.$

$$= 2r^2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) = 2r^2(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma)$$

$$= 4r^2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4r^2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left. = 4r^2\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 4r^2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\right]$$

k) $s(s-c)$. l) $(s-a)(s-b)$. m) $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

n) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

2. Gegeben α, β, γ; gesucht

a) $\frac{a}{b}$. $\left[\frac{a}{b} = \frac{2r\sin\alpha}{2r\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\right]$ b) $\frac{a+b}{c}$. c) $\frac{a+b}{a-b}$.

d) $\frac{a^2-b^2}{ab}$. e) $\frac{a^2-b^2}{c^2}$. f) $\frac{s}{c}$. g) $\frac{s-c}{c}$. h) $\frac{s}{a+b}$.

i) $\frac{s-c}{a+b}$. k) $\frac{s}{s-c}$. l) $\frac{s-a}{s-b}$. m) $\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$.

3. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht r.

4. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht eine andere der Größen in 1). [Man drücke die gegebene und die gesuchte Größe durch r und die Winkel aus und eliminiere aus den beiden erhaltenen Gleichungen r.]

§ 108.

Mit Hilfe der in § 107 für die Seiten und die Summe und die Differenz zweier Seiten erhaltenen Ausdrücke lassen sich leicht die in §§ 57, 63, 64 und 59 zur Berechnung eines beliebigen Dreiecks aufgestellten Sätze ableiten.

1. Aus $a = 2r \sin\alpha$, $b = 2r \sin\beta$, $c = 2r \sin\gamma$ folgt

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta,$$
$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma,$$
$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha. \quad \text{(Der Sinussatz. § 57.)}$$

2. Aus $a + b = 4r \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und

$$a - b = 4r \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ folgt}$$

$$(a+b) : (a-b) = \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad \text{(Der Tangentensatz. § 63.)}$$

Der Tangentensatz ergiebt sich auch aus dem Sinussatze auf folgende Weise: Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ folgt

$$a + b) : (a - b) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3. Aus den in 1) und 2) angeführten Formeln folgt

$$(a+b) : c = \left(4r\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : (2r\sin\gamma)$$
$$= \left(4r\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \left(4r\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$(a-b):c = \left(4\,r\,\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right):(2\,r\,\sin\gamma)$$

$$= \left(4\,r\,\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right):\left(4\,r\,\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\alpha-\beta}{2}:\cos\frac{\gamma}{2}.$$ (Der Gaußische Doppelsatz. § 64.)

4. Aus $a = 2\,r\,\sin\alpha$, $b = 2\,r\,\sin\beta$, $c = 2\,r\,\sin\gamma$ folgt

$$\begin{aligned} a^2+b^2-c^2 &= 4\,r^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma) \\ &= 8\,r^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \quad (\S\ 99,\ 18.) \\ &= 2\,.\,2\,r\sin\alpha\,.\,2\,r\sin\beta\,.\cos\gamma \\ &= 2\,ab\cos\gamma \\ c^2 &= a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}. \end{aligned}$$ (Der Kosinussatz. § 59.)

Der Kosinussatz läßt sich auch noch auf folgende Weise ableiten.

Nach 3) ist $c\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$ und

$c\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = (a-b)\cos\frac{\gamma}{2}$; folglich ist

$$c^2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = (a+b)^2\sin^2\frac{\gamma}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)+b^2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right) \\ &\quad -2\,ab\left(\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

§ 109.

1. Gegeben r, α, β, γ; gesucht

a) h_c. $\Big[h_c = a\sin\beta = 2\,r\sin\alpha\sin\beta$

$= r(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) = r(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma)$

$$= 2r\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2r\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 2r\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2r\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).]$$

b) h_a. c) h_b.

d) p. [$p = a\cos\beta = 2r\sin\alpha\cos\beta = r(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$
$= r(\sin\gamma + \sin(\alpha-\beta))$.]

e) q. f) $h_b + h_a$. g) $h_b - h_a$. h) $p + q$. i) $p - q$.

k) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

$$\left[= \frac{1}{2r\sin\beta\sin\gamma} + \frac{1}{2r\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{1}{2r\sin\alpha\sin\beta}\right.$$

$$= \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{8r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\left.= \frac{1}{4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.\right]$$

l) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$. m) $\dfrac{a+b\pm c}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\pm\frac{1}{h_c}}$. n) $\dfrac{h_a+h_b+h_c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\pm\frac{1}{c}}$.

o) F. p) $\frac{F}{abc}$. q) $\frac{F}{s}$. r) $\frac{F}{s-c}$. s) $F\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$.

2. Gegeben α, β, γ; gesucht

a) $\frac{h_a}{h_b}$. b) $\frac{p}{q}$. c) $\frac{h_b+h_a}{h_b-h_a}$. d) $\frac{p+q}{p-q}$. e) $\frac{h_b^2-h_a^2}{p^2-q^2}$.

f) $\frac{h_b+h_a}{a+b}$. g) $\frac{h_b-h_a}{a-b}$. h) $\frac{p-q}{a\pm b}$. i) $\frac{h_b\pm h_a}{c}$. k) $\frac{h_a h_b h_c}{abc}$.

l) $\dfrac{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}}$. m) $\dfrac{-\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}{\dfrac{1}{h_a} - \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}$.

3. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht r.

4. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht eine andere der Größen in 1).

5. Gegeben eine der Größen in § 107, 1 und § 109, 1 und die Winkel; gesucht eine andere der Größen in § 107, 1 und § 109, 1.

§ 110.

1. Gegeben r, α, β, γ; gesucht

a) w_γ. $\Big[w_\gamma = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\varphi_1}$ ($\triangle BCW_\gamma$)

$$= \frac{2r \sin\alpha \sin\beta}{\sin\varphi_1}.$$

$$\varphi_1 = \alpha + \frac{\gamma}{2}$$

$$= \alpha + 1R - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$= 1R + \frac{\alpha - \beta}{2};$$

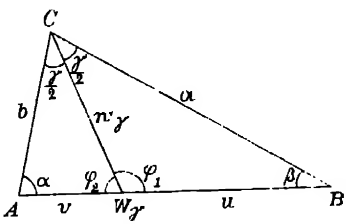

Fig. 54.

$$\sin\varphi_1 = \sin\left(1R + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(1R - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$w_\gamma = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.\Big]$$

b) u. $\left[u = \dfrac{a \sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\varphi_1} = \dfrac{2r \sin\alpha \sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.\right]$

c) v. $\left[v = \dfrac{2r \sin\beta \sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.\right]$

d) u — v. $\left[u - v = \frac{2r(\sin\alpha - \sin\beta)\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right.$

$$= \frac{4r\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = 4r\sin^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.\Big]$$

2. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht r.

3. Gegeben eine der Größen in 1) und die Winkel; gesucht eine andere der Größen in 1).

4. Gegeben eine der Größen in § 107, 1, § 109, 1 und § 110, 1 und die Winkel; gesucht eine andere dieser Größen.

5. Zu beweisen:

a) $w_\gamma = \frac{2F}{(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}}$. $\left[2F = bw \sin\frac{\gamma}{2} + aw \sin\frac{\gamma}{2}.\right]$

b) $w_\gamma = \frac{2F}{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$. $\left[2F = vw_\gamma \cos\frac{c-\beta}{2} + uw_\gamma\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\right.$
oder a) und § 64.]

c) $w_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$. [a) und § 65, 1.]

d) $w_\gamma = \frac{4F}{h_b + h_a}\cos\frac{\gamma}{2}$. [a) und § 70, o.]

e) $u = \frac{2F}{(a+b)\sin\beta}$. $\left[2F = ua\sin\beta + vb\sin\alpha\right.$
$= ua\sin\beta + \frac{u\sin\beta}{\sin\alpha} b\sin\alpha.\Big]$

f) $v = \frac{2F}{(a+b)\sin\alpha}$. g) $w = \frac{ab}{2r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$. [c).]

h) $w_\gamma = \frac{2ab}{p-q}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. [c) und § 70, e.]

i) $w_\alpha : w_\beta = \left(\sin\beta \cos\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) : \left(\sin\alpha \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2}\right)$.

k) $$w_\alpha \sin\alpha \cos\frac{\beta - \gamma}{2} = w_\beta \sin\beta \cos\frac{\gamma - \alpha}{2} = w_\gamma \sin\gamma \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

§ 111.

1. Zu beweisen, daß

a) $\varrho = \frac{F}{s}$. [Der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AWB, BWC und CWA.]

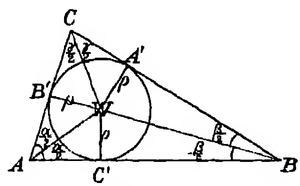

Fig. 55.

b) $\varrho = (s - c) \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = (s - a) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (s - b) \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. [In dem Dreieck CA'W ist CA' = s — c.]

Was ergiebt sich, wenn $\gamma = 90^0$?

c) $\varrho = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$. [Aus b) und § 62, 3 oder Planim. § 113, 6, a.]

Was ergiebt sich, wenn a = b = c?

d) $\varrho = c \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = a \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = b \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ [Bezeichnet man im Dreieck AWB Seite AW mit x, so ist $\varrho = x \sin\frac{\alpha}{2}$ und $x : c = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, d. h. $x = \frac{c \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.]

Was ergiebt sich, wenn $\alpha = \beta = \gamma$?

e) $\varrho = 4 r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$. [d) und § 57, 2.]

Was ergiebt sich, wenn $\alpha = \beta = \gamma$?

f) $\varrho_c = \frac{F}{s - c}$; $\varrho_a = \frac{F}{s - a}$; $\varrho_b = \frac{F}{s - b}$. [Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AW_cC und BW_cC vermindert um den Flächeninhalt des Dreiecks AW_cB.]

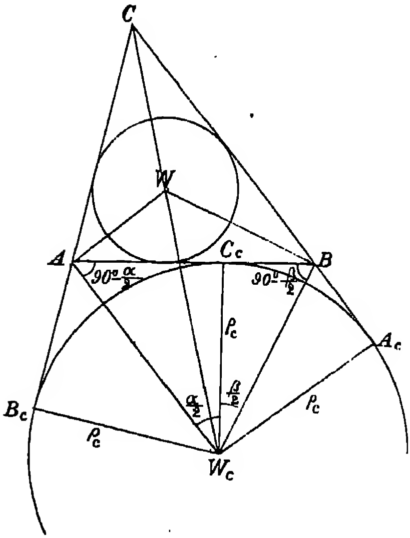

Fig. 56.

g) $\varrho_c = s \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

$= (s - a) \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

$= (s - b) \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

$= (s - c) \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

$\varrho_a = s \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$= (s - b) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

$= (s - c) \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

$= (s - a) \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$\varrho_b = s \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (s - c) \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = (s - a) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

$= (s - b) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Was ergiebt sich für $\gamma = 90^0$?

h) $\varrho_c = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - b)}{s - c}}$; $\varrho_a = \sqrt{\frac{s(s - b)(s - c)}{s - a}}$;

$\varrho_b = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - c)}{s - b}}$.

Was ergiebt sich für $a = b = c$?

i) $\varrho_c = c\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = a\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = b\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

$$\varrho_a = a\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = b\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = c\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

$$\varrho_b = b\,\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = c\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = a\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Was ergiebt sich, wenn $\alpha = \beta = \gamma$?

k) $\varrho_c = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

$\varrho_a = 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

$\varrho_b = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Was ergiebt sich, wenn $\alpha = \beta = \gamma$?

2. Gegeben r, α, β, γ; gesucht

a) $\varrho_a + \varrho_b$. (Was ergiebt sich für $\gamma = 90^\circ$?) b) $\varrho_a - \varrho_b$.
c) $\varrho_c + \varrho$. d) $\varrho_c - \varrho$. (Was ergiebt sich für $\gamma = 90^\circ$?)
e) $h_c - \varrho$. f) $h_c + \varrho_c$. g) $\varrho_a - h_c$. h) $h_c - \varrho_b$.

3. Gegeben ϱ oder ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c oder eine der Größen in 2) und die Winkel; gesucht r.

4. Gegeben ϱ oder ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c oder eine der Größen in 2) und die Winkel; gesucht die übrigen der vorstehenden Größen.

5. Gegeben eine der Größen § 107, 1, § 109, 1, § 110, 1 und § 111, 1 u. 2 und die Winkel; gesucht die übrigen dieser Größen.

§ 112.

Mit Hilfe der Paragraphen 107 bis 111 läßt sich leicht die Aufgabe lösen, aus einer der Größen § 107, 1, § 109, 1, § 110, 1 und § 111, 1 u. 2 und den Winkeln das Dreieck zu berechnen. Man drückt das gegebene Stück aus durch r und die Winkel und löst die erhaltene Gleichung nach r auf; dann kann man aus dem für r erhaltenen Werte und den Winkeln jedes beliebige Stück berechnen.

In den folgenden Aufgaben ist eins der gegebenen Stücke ein Winkel oder die Differenz zweier Winkel.

Um die Aufgabe zu lösen, drückt man die beiden anderen gegebenen Stücke durch r und die Winkel aus und eliminiert aus den beiden so erhaltenen Gleichungen (durch Division derselben durch einander) r; ist eins der beiden anderen gegebenen Stücke r selbst, so drückt man das andere Stück durch r und die Winkel aus und setzt in der so erhaltenen Gleichung den für r gegebenen Wert ein. Hierdurch erhält man eine Gleichung, welche außer bekannten Größen entweder nur einen unbekannten Winkel enthält oder zwei oder alle drei Winkel. Im ersten Falle berechnet man aus der erhaltenen Gleichung diesen Winkel und findet dann mit Hilfe des gegebenen Winkels oder der gegebenen Differenz zweier Winkel die Winkel des Dreiecks. Den dritten Fall führt man auf den zweiten Fall zurück, indem man einen der unbekannten Winkel durch die beiden anderen ausdrückt, da ja die Summe der Winkel gleich 180^0 ist. Im zweiten und dritten Falle ist die Aufgabe auf eine der Aufgaben in § 104 zurückgeführt. Die Kenntnis der Lösung der Aufgabe § 103, 81 wird vorausgesetzt.

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Summe zweier Seiten gleich k m, die Summe der zugehörigen Höhen gleich l m und die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich η ist.

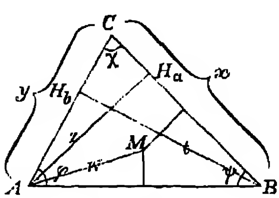

Fig. 57.

Auflösung. In dem Dreieck ABC sei die Summe der beiden Seiten BC und AC gleich k m, die Summe der zugehörigen Höhen AH_a und BH_b gleich l m und die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel BAC und ABC gleich η.

Es sei BC = x m, AC = y m, AH = z m, BH_b = t m, $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$, $\angle ACB = \chi$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises MA = w m. Dann ist

$$
\begin{array}{ll}
1) & x + y = k \\
2) & z + t = l \\
3) & \varphi - \psi = \eta \\
4) & x = 2w \sin\varphi \\
5) & y = 2w \sin\psi
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}x\\y\end{array}}\right\}\ \text{§ 57, 2.}
$$

$$
\begin{array}{ll}
6) & z = 2w \sin\psi \sin\chi \\
7) & t = 2w \sin\varphi \sin\chi
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}x\\y\end{array}}\right\}\ \text{§ 109, 1 a.}
$$

$$8)\quad \varphi + \psi + \chi = 180^0$$

[Dies sind acht Gleichungen mit acht Unbekannten. Würde keine der Gleichungen 1) bis 7) den unbekannten Winkel χ enthalten, so würde die Gleichung 8) überflüssig sein.]

Setzt man die für x, y, z, t in den Gleichungen 4) bis 7) erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen 1) und 2) ein, so erhält man

$$
\begin{array}{ll}
1') & 2\,w\,(\sin\varphi + \sin\psi) = k \\
2') & 2\,w \sin\chi\,(\sin\varphi + \sin\psi) = l \\
3') & \varphi - \psi = \eta \\
4') & \varphi + \psi + \chi = 180^0
\end{array}
$$

Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen (durch Division) w, so ist

$$
\begin{array}{ll}
1'') & \sin\chi = \dfrac{l}{k} \\
2'') & \varphi - \psi = \eta \\
3'') & \varphi + \psi + \chi = 180^0
\end{array}
$$

Berechnet man aus 1'') χ und setzt den erhaltenen Wert in 3'') ein, so kann man aus 2'') und 3'') φ und ψ berechnen. Aus 1') oder 2') ergiebt sich dann w. Da man jetzt den Radius des umbeschriebenen Kreises und die Winkel kennt, so kann man jede der in den Paragraphen 107 bis 111 angeführten Größen berechnen.

Bemerkung. Will man die große Zahl der oben anfangs aufgestellten Gleichungen (8) vermeiden, so verfährt man auf folgende Weise:

In dem Dreieck ABC sei die Summe der beiden Seiten BC und AC gleich k m, die Summe der zugehörigen Höhen AH_a und BH_b gleich l m und die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel BAC und ABC gleich η. Ferner sei $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$, $\angle ACB = \chi$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich w m. Dann ist (nach den früher abgeleiteten Formeln $a = 2\,r \sin\alpha$ und $h_c = 2\,r \sin\alpha \sin\beta$)

$$
\begin{array}{ll}
1) & 2\,w\,(\sin\varphi + \sin\psi) = k \\
2) & 2\,w \sin\chi\,(\sin\varphi + \sin\psi) = l \\
3) & \varphi - \psi = \eta \\
4) & \varphi + \psi + \chi = 180^0 \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

Aufgabe 2. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Differenz zweier Seiten gleich k cm, die Differenz ihrer Projektionen auf die dritte Seite gleich l cm und die Differenz der den beiden ersten Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich η ist.

Auflösung. In dem Dreieck ABC sei $BC - AC = k$ cm, CH_0 das von C auf AB gefällte Lot, $H_0B - H_0A = l$ cm und $\angle BAC - ABC = \eta$. Ferner sei $BC = x$ cm, $AC = y$ cm, $H_0B = z$ cm, $H_0A = t$ cm, $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$, $\angle ACB = \chi$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises $MA = u$ cm. Es ist

$$
\begin{array}{ll}
1) & x - y = k \\
2) & z - t = l \\
3) & \varphi - \psi = \eta \\
4) & \quad x = 2u \sin\varphi \\
5) & \quad y = 2u \sin\psi \\
6) & \quad z = 2u \sin\varphi \cos\psi \\
7) & \quad t = 2u \cos\varphi \sin\psi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
1') & 2u(\sin\varphi - \sin\psi) = k \\
2') & 2u(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) = l \\
 & 2u\sin(\varphi - \psi) = l \\
3') & \varphi - \psi = \eta
\end{array}
$$

$$1'')\quad \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} = \frac{k}{l}$$

$$2'')\quad \varphi - \psi = \eta$$

Dies sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten φ und ψ. Da man aus 2'') $\varphi - \psi = \eta$ kennt, so muß man, um $\varphi + \psi$ zu finden, Gleichung 1'') so umformen, daß sie außer bekannten Größen nur noch Funktionen von $\varphi + \psi$ und $\varphi - \psi$ enthält. Dann ist

$$1'')\quad \frac{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{k}{l}.$$

Da auf der linken Seite Funktionen von $\varphi - \psi$ und von $\frac{\varphi - \psi}{2}$ auftreten, so sucht man dieselbe, um sie vielleicht vereinfachen zu können, so umzuformen, daß nur noch Funktionen von $\varphi - \psi$ oder nur noch Funktionen von $\frac{\varphi - \psi}{2}$ vorkommen.

$$1'')\quad \frac{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$

$$1'')\quad \frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$

$$2'')\qquad \varphi-\psi = \eta$$

$$\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{k}{l}\cos\frac{\eta}{2}.$$

Hieraus wird $\frac{\varphi+\psi}{2}$ berechnet. Da man aus 2'') $\varphi-\psi$, also auch $\frac{\varphi-\psi}{2}$ kennt, so findet man φ und ψ und damit auch χ. Aus 2') ergiebt sich u.

[Andere Auflösungen.

1. 1) $x - y = k$

2) $z - t = l$

3) $\varphi - \psi = \eta$

4) $\frac{x+y}{z+t} = \frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}$ [§ 64 oder § 108, 3.]

5) $\frac{x^2-y^2}{z^2-t^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(z+t)(z-t)} = 1$ [§ 70, 1a.]

1') $\frac{x+y}{z+t} = \frac{\cos\frac{\eta}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}$

2') $\frac{x+y}{z+t}\cdot\frac{k}{l} = 1$

$$\frac{k}{l} = \frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\frac{\eta}{2}}$$

$$\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{k}{l}\cos\frac{\eta}{2}.$$

2. Trägt man H_oA auf H_oB von H_o aus bis zum Punkte D ab und verbindet D mit C, so ist in dem Dreieck BCD DC = AC = y cm,

$BC - DC = k$ cm, $BD = H_cB - H_cA = l$ cm, $\angle BCD = \varphi - \psi = \eta$, $\angle BDC = 180^0 - \varphi$. Folglich ist

$$k : l = \cos\frac{\varphi + \psi}{2} : \cos\frac{\eta}{2} \text{ [§ 64 oder § 108, 3.]}$$

$$\cos\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{k}{l}\cos\frac{\eta}{2}.$$

3. Trägt man CD auf CB von C aus ab bis E und verbindet E mit D, dann ist in dem Dreieck BDE $BD = l$ cm, $BE = k$ cm, $\angle BED = 90^0 + \frac{\varphi - \psi}{2} = 90^0 + \frac{\eta}{2}$, $\angle BDE = 90^0 - \frac{\varphi + \psi}{2}$. Folglich ist nach dem Sinussatze

$$k : l = \cos\frac{\varphi + \psi}{2} : \cos\frac{\eta}{2};\quad \cos\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{k}{l}\cos\frac{\eta}{2}.$$

4. Im Dreieck BCD ist nach dem Kosinussatze

$$1)\quad x^2 + y^2 - 2xy\cos\eta = l^2; \text{ ferner ist}$$
$$2)\quad x - y = k$$

$$1)\quad x^2 + y^2 - 2xy\cos\eta = l^2$$
$$2)\quad x^2 + y^2 - 2xy = k^2$$

$$2xy(1 - \cos\eta) = l^2 - k^2$$

$$2xy\left(1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\eta}{2}\right)\right) = l^2 - k^2$$

$$1')\quad 4xy = \frac{l^2 - k^2}{\sin^2\frac{\eta}{2}}$$

$$2')\quad x^2 + y^2 - 2xy = k^2$$

$$(x + y)^2 = \frac{l^2 - k^2}{\sin^2\frac{\eta}{2}} + k^2 = \frac{l^2 - k^2\cos^2\frac{\eta}{2}}{\sin^2\frac{\eta}{2}}$$

$$x + y = \frac{1}{\sin\frac{\eta}{2}}\sqrt{l^2 - k^2\cos^2\frac{\eta}{2}}$$

$$x + y = \frac{l}{\sin\frac{\eta}{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{l}\cos\frac{\eta}{2}\right)^2}.$$

Da $x^2 - y^2 = z^2 - t^2$ und $x + y > z + t$, so ist $x - y < z - t$, d. h. $k < l$, $\frac{k}{l} < 1$, $\frac{k}{l} \cos \frac{\eta}{2} < 1$. Setzt man daher [§ 100, 4]

$$\frac{k}{l} \cos \frac{\eta}{2} = \cos \mu,$$

so ist

$$1'')\ x + y = \frac{l \sin \mu}{\sin \frac{\eta}{2}}$$

$$2'')\ x - y = k$$

$$x = \frac{1}{2}\left(l \frac{\sin \mu}{\sin \frac{\eta}{2}} + k\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(l \frac{\sin \mu}{\sin \frac{\eta}{2}} - k\right).]$$

Aufgabe 3. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Differenz aus der zu einer Seite gehörigen Höhe und dem Radius des einbeschriebenen Kreises gleich k m, die Summe der beiden anderen Seiten gleich l m und der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel gleich η ist.

Auflösung. In dem Dreieck ABC sei die Differenz aus der zur Seite AB gehörigen Höhe CH_c und dem Radius des einbeschriebenen Kreises WC' gleich k m, die Summe der beiden anderen Seiten BC und AC gleich l m und der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel $ACB = \eta$. Es sei $CH_c = x$ m, $WC' = y$ m, $BC = z$ m, $AC = t$ m, $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises $MA = u$ m. Dann ist

$$1)\ x - y = k$$
$$2)\ z + t = l$$
$$3)\ \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$
$$4)\ x = 2u \sin \varphi \sin \psi$$
$$5)\ y = 4u \sin \frac{\eta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad [§ 111, 1 e.]$$
$$6)\ z = 2u \sin \varphi$$
$$7)\ t = 2u \sin \psi$$

$$1')\ 2u \sin \varphi \sin \psi - 4u \sin \frac{\eta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} = k$$

$$4u \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\eta}{2}\right) = k$$

$$2')\qquad 2\,u\,(\sin\varphi + \sin\psi) = 1$$
$$3')\qquad \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$

$$1'')\qquad \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\eta}{2}\right)}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{k}{l}$$
$$2'')\qquad \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$

$$1'')\qquad \frac{\left(\cos\frac{\varphi-\psi}{2} - \cos\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + \cos\frac{\varphi+\psi}{2} - \sin\frac{\eta}{2}\right)}{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$
$$2'')\qquad \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$

$$\frac{\left(\cos\frac{\varphi-\psi}{2} - \sin\frac{\eta}{2}\right)\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{2k}{l}\cos\frac{\eta}{2} + \sin\frac{\eta}{2}$$

$$\dagger)\qquad \frac{2k}{l} = \operatorname{ctg}\mu$$

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{ctg}\mu\cos\frac{\eta}{2} + \sin\frac{\eta}{2}$$

$$\dagger\dagger)\qquad \cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\cos\left(\mu - \frac{\eta}{2}\right)}{\sin\mu}.$$

Aus †) wird μ, aus ††) $\frac{\varphi-\psi}{2}$ berechnet; hieraus und aus 2″) findet man φ und ψ. Nun berechnet man u aus der Gleichung

$$2')\qquad 2\,u\,(\sin\varphi + \sin\psi) = 1$$

$$4\,u\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = 1$$

$$u = \frac{1}{4\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}.$$

Aufgabe 4. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Differenz aus der zu einer Seite gehörigen Höhe und dem Radius des einbeschriebenen Kreises gleich k m, die Summe der beiden anderen Seiten gleich l m und der der größeren der beiden letzten Seiten gegenüberliegende Winkel gleich η ist.

Auflösung. In dem Dreieck ABC sei die Differenz aus der zur Seite AB gehörigen Höhe CH_0 und dem Radius des einbeschriebenen Kreises WC' gleich k m, die Summe der beiden anderen Seiten BC und AC gleich l m und der der größeren von diesen beiden Seiten gegenüberliegende Winkel BAC gleich η. Es sei ferner CH_0 gleich x m, WC' gleich y m, BC gleich z m, AC gleich t m, $\angle$ ABC gleich φ, $\angle$ ACB $= \psi$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich u m. Dann ist

$$\begin{aligned}
&1)\quad x - y = k\\
&2)\quad z + t = l\\
&3)\quad \varphi + \psi = 180^0 - \eta\\
&4)\quad x = 2\,u \sin\eta \sin\varphi\\
&5)\quad y = 4\,u \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\
&6)\quad z = 2\,u \sin\eta\\
&7)\quad t = 2\,u \sin\varphi
\end{aligned}$$

$$1')\quad 2\,u \sin\eta \sin\varphi - 4\,u \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} = k$$

$$4\,u \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\right) = k$$

$$2')\quad 2\,u\,(\sin\eta + \sin\varphi) = l$$

$$3')\quad \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$

$$1'')\quad \frac{2\sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\eta + \sin\varphi} = \frac{k}{l}$$

$$2'')\quad \varphi + \psi = 180^0 - \eta$$

$$2'')\quad \psi = 180^0 - \eta - \varphi$$

$$\frac{2\sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\eta+\varphi}{2}\right)}{\sin\eta + \sin\varphi} = \frac{k}{l}$$

$$\dagger)\quad \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\eta + \sin\varphi} = \frac{k}{2\,l\sin\frac{\eta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\eta-\varphi}{2}}{2\sin\frac{\eta+\varphi}{2}\cos\frac{\eta-\varphi}{2}} = \frac{k}{2\,l\sin\frac{\eta}{2}}$$

$$††)\quad \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\eta+\varphi}{2}} = \frac{k}{l\sin\frac{\eta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{l\sin\frac{\eta}{2}}{k}$$

$$\sin\frac{\eta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\eta}{2} = \frac{l\sin\frac{\eta}{2}}{k}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{l}{k} - \operatorname{ctg}\frac{\eta}{2}.$$

Setze $\frac{l}{k} = \operatorname{ctg}\mu$, dann ist

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\eta}{2}-\mu\right)}{\sin\frac{\eta}{2}\sin\mu}.$$

Da $\frac{\eta+\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\eta}{2}$ (also bekannt) ist, so hätte man die Gleichung ††) auch auf folgende Weise lösen können:

$$\frac{\sin\frac{\eta+\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\eta+\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{l\sin\frac{\eta}{2}+k}{l\sin\frac{\eta}{2}-k}$$

$$\frac{2\sin\frac{\eta+2\varphi}{4}\cos\frac{\eta}{4}}{2\cos\frac{\eta+2\varphi}{4}\sin\frac{\eta}{4}} = \frac{l\sin\frac{\eta}{2}+k}{l\sin\frac{\eta}{2}-k}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\eta+2\varphi}{4} = \frac{l\sin\frac{\eta}{2}+k}{l\sin\frac{\eta}{2}-k}\operatorname{tg}\frac{\eta}{4}.$$

Da $l\sin\frac{\eta}{2} > 0$ und $k > 0$, so setzt man $\sqrt{\frac{k}{l\sin\frac{\eta}{2}}} = \operatorname{tg}\mu$, dann ist

$$\operatorname{tg}\frac{\eta+2\varphi}{4} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\mu}{1-\operatorname{tg}^2\mu}\operatorname{tg}\frac{\eta}{4} = \frac{1}{\cos 2\mu}\operatorname{tg}\frac{\eta}{4}.$$

Gleichung †) hätte auch auf folgende Weise behandelt werden können:

$$\frac{\cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\eta}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\eta+\sin\varphi}=\frac{k}{2\,l\sin\frac{\eta}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\eta}{2}\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\frac{\eta}{2}(1-\cos\varphi)}{\sin\eta+\sin\varphi}=\frac{k}{2\,l\sin\frac{\eta}{2}}$$

$$l\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}\sin\varphi+l\sin^2\frac{\eta}{2}-l\sin^2\frac{\eta}{2}\cos\varphi=k\sin\eta+k\sin\varphi$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin\eta-k\right)\sin\varphi-l\sin^2\frac{\eta}{2}\cos\varphi=k\sin\eta-l\sin^2\frac{\eta}{2}.\quad[\S 103,81.]$$

Ein Dreieck zu berechnen aus

1) c, r, $\alpha-\beta$.
2) $p-q$, r, γ.
3) h_c, r, α.
4) $a\pm b$, r, γ $(\alpha-\beta)$.
5) $h^b\pm h_a$, r, γ.
6) $h_b\pm h_a$, $a\pm b$, $\alpha-\beta$.
7) $a\pm b$, c, γ $(\alpha-\beta)$.
8) $h_b\pm h_a$, c, γ $(\alpha-\beta)$.
9) $h_b\pm h_a$, $a\mp b$, γ $(\alpha-\beta)$.
10) $p-q$, $a\pm b$, γ $(\alpha-\beta)$.
11) p, q, α $(\gamma;\ \alpha-\beta)$.
12) a^2-b^2, c, γ $(\alpha-\beta)$.
13) a^2-b^2, $p-q$, γ $(\alpha-\beta)$.
14) $h_b^2-h_a^2$, c, γ $(\alpha-\beta)$.
15) $h_b^2-h_a^2$, $p-q$, γ $(\alpha-\beta)$.
16) w_γ, a, β $(\alpha-\beta)$.
17) w_γ, h_c, γ (α).
18) w_γ, p, β $(\alpha-\beta)$.
19) w_γ, u, β (γ).
20) u, a, γ $(\alpha-\beta)$.
21) u, h_b, γ $(\alpha-\beta)$.
22) u, $a-b$, α $(\alpha-\beta)$.
23) $u-v$, r, γ $(\alpha-\beta)$.
24) $u-v$, $a-b$, γ $(\alpha-\beta)$.
25) $u-v$, h_b-h_a, γ $(\alpha-\beta)$.
26) $u-v$, $p-q$, γ $(\alpha-\beta)$.
27) ϱ, $s-c$, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
28) ϱ_c, s, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
29) ϱ_c, $s-a$, α $(\gamma;\ \alpha-\beta)$.
30) $\varrho_a+\varrho_b$, c, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
31) $\varrho_a-\varrho_b$, $a\pm b$, α.
32) $\varrho_a-\varrho_b$, h_b-h_a, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
33) $\varrho_c+\varrho$, $a\pm b$, α.
34) $\varrho_c+\varrho$, h_b+h_a, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
35) $\varrho_c-\varrho$, c, α $(\beta;\ \alpha-\beta)$.
36) $\varrho_c-\varrho$, $u-v$, α $(\beta;\ \gamma)$.
37) $\varrho_c-\varrho$, $\varrho_a+\varrho_b$, α $(\beta;\alpha-\beta)$.
38) ϱ_a, ϱ_b, α (β).
39) $\varrho_a+\varrho_b$, $a\pm b$, γ.
40) $\varrho_a+\varrho_b$, $h_b\pm h_a$, γ.
41) $\varrho_a\pm\varrho_b$, $u-v$, γ.
42) $\varrho_c+\varrho$, $u-v$, $\alpha-\beta$.
43) $\varrho_c+\varrho$, $\varrho_a\pm\varrho_b$, γ.
44) $\varrho_c-\varrho$, $\varrho_a-\varrho_b$, γ.
45) $h_c+\varrho_c$, s, γ $(\alpha-\beta)$.
46) ϱ_a-h_c, $s-b$, γ $(\alpha-\beta)$.

---

47) h_c, r, $\alpha - \beta$ (γ).
48) h_c, c, γ.
49) h_c, $p - q$, $\alpha - \beta$.
50) s, r, γ.
51) s, c, γ ($\alpha - \beta$).
52) s, h_c, γ.
53) F, r, γ.
54) F, c, γ.
55) F, s, γ.
56) $a \pm b$, c, α (β).
57) $a \pm b$, $p - q$, α.
58) s, h_c, α.
59) $s - c$, p, β.
60) F, c, α.
61) F, h_c, α.
62) h_c, c, $\alpha - \beta$.
63) $p - q$, h_c, γ.
64) s, h_c, $\alpha - \beta$.
65) s, $h_b - h_a$, γ.
66) F, c, $\alpha - \beta$.
67) F, h_c, $\alpha - \beta$.
68) w_γ, r, $\alpha - \beta$.
69) w_γ, $p - q$, $\alpha - \beta$.
70) w_γ, s, γ.
71) w_γ, $a + b$, γ.
72) w_γ, F, γ.
73) $u - v$, w_γ, $\alpha - \beta$.
74) u, $a - b$, β.
75) u, h_c, β.
76) $u - v$, $a - b$, α.
77) u, w_γ, $\alpha - \beta$.
78) u, h_c, $\alpha - \beta$.
79) w_γ, c, $\alpha - \beta$.
80) w_γ, $a - b$, γ.
81) w_γ, $s - c$, $\alpha - \beta$.
82) w_γ, F, $\alpha - \beta$.
83) ϱ_c, $s - c$, γ.
84) ϱ, c, γ.
85) ϱ_c, c, γ.
86) ϱ_a, ϱ_b, γ ($\alpha - \beta$).
87) ϱ, h_c, γ ($\alpha - \beta$).
88) ϱ_c, h_c, γ ($\alpha - \beta$).
89) ϱ_c, ϱ, γ ($\alpha - \beta$).
90) ϱ, w_γ, γ ($\alpha - \beta$).
91) ϱ_c, w_γ, γ ($\alpha - \beta$).
92) ϱ, $a + b$, γ.
93) ϱ_c, $a + b$, γ.
94) ϱ, $a - b$, $\alpha - \beta$.
95) ϱ_c, $a - b$, $\alpha - \beta$.
96) ϱ, $u - v$, $\alpha - \beta$.
97) ϱ_c, $u - v$, $\alpha - \beta$.
98) $\varrho_a + \varrho_b$, s, γ.
99) $\varrho_a + \varrho_b$, ϱ, γ.
100) $\varrho_a + \varrho_b$, ϱ_c, γ.
101) $\varrho_c + \varrho$, $\varrho_a - \varrho_b$, α.
102) $\varrho_c - \varrho$, $h_b - h_a$, α.
103) $h_c - \varrho$, $a + b$, γ.
104) $h_c - \varrho$, $a - b$, $\alpha - \beta$.
105) $\varrho_a + \varrho_b$, w_γ, $\alpha - \beta$.
106) $\varrho_c + \varrho$, w_γ, γ.
107) $\varrho_a + \varrho_b$, $a + b$, α.
108) $\varrho_c + \varrho$, c, α.
109) $\varrho_a - \varrho_b$, c, α.
110) $\varrho_c - \varrho$, $a - b$, α.
111) $\varrho_c - \varrho$, u, $\alpha - \beta$.
112) ϱ, c, α.
113) ϱ, h_c, α.
114) $\varrho_a - \varrho_b$, s, α.
115) ϱ, c, $\alpha - \beta$.
116) ϱ_c, c, $\alpha - \beta$.
117) ϱ, $a - b$, γ.
118) ϱ_c, $a - b$, γ.
119) $\varrho_a - \varrho_b$, a, β.
120) $\varrho_a - \varrho_b$, ϱ, γ.
121) $\varrho_a - \varrho_b$, ϱ_c, γ.
122) $\varrho_c + \varrho$, a, β.
123) $h_c - \varrho$, $a + b$, $\alpha - \beta$.
124) $h_c + \varrho_c$, $a + b$, $\alpha - \beta$.
125) $h_c - \varrho$, $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$.
126) $h_c + \varrho_c$, $\varrho_a - \varrho_b$, $\alpha - \beta$.

§ 113.

In den folgenden Aufgaben ist kein Winkel gegeben.

Drückt man die gegebenen Stücke durch r und die Winkel aus, so erhält man drei Gleichungen mit r und den Winkeln; als vierte Gleichung tritt noch die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ hinzu. Dann eliminiert man aus den ersten drei Gleichungen r (durch Division derselben durcheinander) und erhält so drei Gleichungen zur Bestimmung der Winkel.

Aufgabe. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Summe zweier Seiten gleich km, die dritte Seite gleich lm und die zur dritten Seite gehörige Höhe gleich nm ist.

Auflösung. In dem Dreieck ABC sei die Summe der beiden Seiten BC und AC gleich km, die dritte Seite AB gleich lm und die zu dieser Seite gehörige Höhe CH_c gleich nm. Ferner sei Seite BC gleich xm, Seite AC gleich ym, der Radius des umbeschriebenen Kreises MB gleich zm, $\angle BAC = \varphi$, $\angle ABC = \psi$, $\angle ACB = \chi$. Dann ist

$$1)\quad x + y = k$$
$$2)\quad x = 2z \sin\varphi$$
$$3)\quad y = 2z \sin\psi$$
$$4)\quad l = 2z \sin\chi$$
$$5)\quad n = 2z \sin\varphi \sin\psi$$
$$6)\quad \varphi + \psi + \chi = 180^0$$

$$1')\quad 2z(\sin\varphi + \sin\psi) = k$$
$$2')\quad 2z \sin\chi = l$$
$$3')\quad 2z \sin\varphi \sin\psi = n$$
$$4')\quad \varphi + \psi + \chi = 180^0$$

$$1'')\quad \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\chi} = \frac{k}{l}$$
$$2'')\quad \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi \sin\psi} = \frac{k}{n}$$
$$3'')\quad \varphi + \psi + \chi = 180^0$$

$$1''')\quad \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{k}{l}$$
$$2''')\quad \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi \sin\psi} = \frac{k}{n}$$

$$1''')\qquad \frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{k}{l}$$

$$2''')\qquad \frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)]} = \frac{k}{n}$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}-\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{k}{2\,n}$$

$$1''')\qquad \cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{k}{l}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,\frac{k}{l}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\frac{k^2}{l^2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}-\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{k}{2\,n}$$

$$\frac{k\,l\,\mathrm{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}{k^2-l^2} = \frac{k}{2\,n}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{(k+l)\,(k-l)}{2\,l\,n}.$$

Aus dieser Gleichung wird $\frac{\varphi+\psi}{2}$ berechnet, dann aus Gleichung $1''')$ $\frac{\varphi-\psi}{2}$; aus $\frac{\varphi+\psi}{2}$ und $\frac{\varphi-\psi}{2}$ findet man φ und ψ. Aus $3'')$ ergiebt sich χ und aus $2')$ z.

[Andere Auflösungen.

1. 1) $x+y = k$

2) $x\,y\sin\chi = l n$

3) $x^2+y^2-2\,x\,y\cos\chi = l^2$

---

3) $(x+y)^2-2\,x\,y\,(1+\cos\chi) = l^2$

$$(x+y)^2 - 4\,x\,y\cos^2\frac{\chi}{2} = l^2$$

$$k^2 - 4\,\frac{l\,n}{\sin\chi}\cos^2\frac{\chi}{2} = l^2$$

$$k^2 - 4\,\frac{l\,n}{2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}}\cos^2\frac{\chi}{2} = l^2$$

$$k^2 - 2\,l\,n\,\mathrm{ctg}\,\frac{\chi}{2} = l^2$$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\chi}{2} = \frac{k^2 - l^2}{2\,l\,n}.$$

2.

$$\begin{array}{ll} 1) & x + y = k \\ 2) & x\,y\sin\chi = l\,n \\ 3) & x^2 + y^2 - 2\,x\,y\cos\chi = l^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2) & 2\,x\,y\sin\chi = 2\,l\,n \\ 3) & 2\,x\,y\cos\chi = x^2 + y^2 - l^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1') & 4\,x^2y^2 = 4\,l^2n^2 + (x^2 + y^2 - l^2)^2 \\ 2') & x + y = k \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1') & 4\,x^2y^2 = 4\,l^2n^2 + [(x+y)^2 - 2\,xy - l^2]^2 \\ 2') & x + y = k \end{array}$$

$$1'')\ 4\,x^2y^2 = 4\,l^2n^2 + [k^2 - 2\,xy - l^2]^2$$

$$4\,x^2y^2 = 4\,l^2n^2 + k^4 + 4\,x^2y^2 + l^4 - 4\,k^2\,xy - 2\,k^2l^2 + 4\,l^2\,xy$$

$$1'')\ 4\,xy = \frac{4\,l^2n^2 + (k^2 - l^2)^2}{k^2 - l^2}$$

$$2'')\ x^2 + y^2 + 2\,xy = k^2$$

$$(x-y)^2 = k^2 - \frac{4\,l^2n^2 + (k^2 - l^2)^2}{k^2 - l^2}$$

$$= \frac{k^4 - k^2l^2 - 4\,l^2n^2 - k^4 + 2\,k^2l^2 - l^4}{k^2 - l^2}$$

$$x - y = l\sqrt{\frac{k^2 - l^2 - 4\,n^2}{k^2 - l^2}}$$

$$x - y = l\sqrt{1 - \frac{4\,n^2}{k^2 - l^2}}.$$

3. Setzt man $x + y + 1 = k + 1 = 2s$, so ist

$$1)\ \operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{s(s-1)}{(s-x)(s-y)}}$$

$$2)\ \tfrac{1}{2}\ln \quad = \sqrt{s(s-1)(s-x)(s-y)}$$

$$\tfrac{1}{2}\ln \operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = s(s-1)$$

$$= \frac{k+1}{2}\,\frac{k-1}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{(k+1)(k-1)}{2\ln}.$$

Ein Dreieck zu berechnen aus:

1) h_c, p, q.
2) $a \pm b,\ h_b \pm h_a,\ c$.
3) $a \pm b,\ h_b \pm h_a,\ p - q$.
4) $w_\gamma,\ h^c,\ a\ (b)$.
5) $w_\gamma,\ h_c,\ p\ (q)$.
6) $w_\gamma,\ a,\ p$.
7) $u,\ a,\ h_b$.
8) $u - v,\ a - b,\ h_b - h_a$.
9) $\varrho_a,\ \varrho_{b'},\ s$.
10) $\varrho_a,\ \varrho_b,\ s - c$.
11) $\varrho_a + \varrho_b,\ c,\ h_a$.
12) $\varrho_c - \varrho,\ c,\ h_a$.
13) $\varrho_a - \varrho_b,\ a + b,\ h_b \pm h_a$.
14) $\varrho_c + \varrho,\ a - b,\ h_b \pm h_a$.
15) $\varrho_a + \varrho_b,\ a \pm b,\ h_b \pm h_a$.
16) $\varrho_c - \varrho,\ a \pm b,\ h_b \pm h_a$.
17) $\varrho_a - \varrho_b,\ \varrho_c + \varrho,\ a \pm b$.
18) $\varrho_a + \varrho_b,\ \varrho_c - \varrho,\ u - v$.
19) $\varrho_a + \varrho_b,\ \varrho_c + \varrho,\ c$.
20) $\varrho_a + \varrho_b,\ \varrho_c + \varrho,\ a + b$.
21) $\varrho_a - \varrho_b,\ \varrho_c - \varrho,\ c$.
22) $\varrho_a - \varrho_b,\ \varrho_c - \varrho,\ a \pm b$.
23) $\varrho_a - \varrho_b,\ \varrho_c \pm \varrho,\ h_b - h_a$.
24) $\varrho_a \pm \varrho_b,\ \varrho_c + \varrho,\ h_b + h_a$.
25) $\varrho_a - \varrho_b,\ a,\ b$. [Bilde $a + b$ und $a - b$.]
26) $\varrho_c + \varrho,\ a,\ b$.
27) $\varrho_a + \varrho_b,\ \varrho_c,\ \varrho$.
28) $\varrho_c - \varrho,\ \varrho_a,\ \varrho_b$.

---

29) h_c, r und a) c. b) $p - q$.
30) F, r und a) c. b) h_c.
31) $a + b,\ h_c,\ p$.
32) $a + b,\ h_b + h_a$ und a) s. b) $s - c$.
33) $a \pm b,\ c$ und a) h_a. b) h_b.
34) h_c, p und a) s. b) $s - c$.
35) $a - b,\ h_b - h_a$ und a) s. b) $s - c$.
36) w_γ, r und a) h_c. b) $p - q$.
37) w_γ, h_c und a) $p - q$. b) $u - v$.
38) $w_\gamma,\ a + b,\ h_b + h_a$.

39) u, a und a) p. b) h_c.
40) w_γ, $a - b$, $h_b - h_a$.
41) w_γ, h_c und a) s. b) $s - c$. c) c. d) F.
42) c, r und a) ϱ. b) ϱ_c.
43) $p - q$, r und a) $h_c - \varrho$. b) $h_c + \varrho_c$. c) $\varrho_a - h_c$.
44) $a + b$, $h_b + h_a$ und a) ϱ. b) ϱ_c. c) $h_c - \varrho$. d) $h_c + \varrho_c$.
45) h_c, w_γ und a) ϱ. b) ϱ_c. c) $\varrho_a + \varrho_b$. d) $\varrho_c - \varrho$.
46) $\varrho_a + \varrho_b$, r und a) h_c. b) s. c) $s - c$. d) p. e) ϱ. f) ϱ_c.
47) $\varrho_a + \varrho_b$, c und a) h_c. b) p. c) ϱ. d) ϱ_c.
48) $\varrho_c + \varrho$, $a + b$ und a) w_γ. b) $h_c - \varrho$. c) $h_c + \varrho_c$.
49) $\varrho_c + \varrho$, $a - b$ und a) $h_c - \varrho$. b) $h_c + \varrho_c$.
50) $\varrho_c - \varrho$, c und a) h_c. b) s. c) ϱ_a.
51) $\varrho_c - \varrho$, $\varrho_a + \varrho_b$ und a) h_c. b) s. c) $s - c$.
52) $\varrho_a - \varrho_b$, $a + b$, h_a.
53) $\varrho_c + \varrho$, $a - b$, h_a.
54) $\varrho \ + \varrho$, $a + b$, h_a.
55) $\varrho_c + \varrho$, a, $h_b + h_a$.
56) $a - b$, $h_b - h_a$ und a) ϱ. b) ϱ_c.
57) $\varrho \ - \varrho_b$, $a + b$ und a) $h_c - \varrho$. b) $h_c + \varrho_c$.
58) $\varrho_a - \varrho_b$, $a - b$ und a) w_γ. b) ϱ. c) ϱ_c.
59) $\varrho_c + \varrho$, ϱ_a und a) $a + b$. b) $h_b + h_a$

60) $\frac{a+b}{r}$, $a \mp b$ und a) c. b) $p - q$.

61) $\frac{a+b}{c}$, $h_b + h_a$, $p - q$.

62) $\frac{h_b + h_a}{c}$, $a + b$, $p - q$.

63) $a + b$, $h_b + h_a$, c.

64) $\frac{u}{a}$ oder $\frac{u-v}{a-b}$ und
a) $a + b$, r. b) $h_b \pm h_a$, c. c) $h_b - h_a$, $p - q$. d) $h_b + h_a$, r.

65) $\frac{u-v}{p-q}$, $a + b$ und a) $h_b - h_a$. b) r.

66) $\frac{u-v}{h_b - h_a}$, $a \pm b$ und a) c. b) $p - q$.

67) $u - v$, $a - b$, r.
68) $u - v$, $p - q$, $h_b - h_a$.
69) $a - b$, $p - q$ und a) $\varrho \ - \varrho$. b) ϱ. c) ϱ_c. d) $h_c - \varrho$. e) $h_c + \varrho_c$.
70) $a - b$, $u - v$ und a) ϱ. b) ϱ_c. c) $h_c - \varrho$. d) $h_c + \varrho_c$.
71) $a + b$, c und a) ϱ. b) ϱ_c. c) $h_c - \varrho$. d) $h_c + \varrho_c$.
72) ϱ, F und a) c. b) $a + b$.
73) ϱ_c, F und a) c. b) $a + b$.
74) $\varrho_c \pm \varrho$, F und a) s. b) $s - c$.

75) $\frac{a \pm b}{c}$, h_c und a) r. b) $a \mp b$. c) $h_b \pm h_a$.

76) $\frac{a \pm b}{p - q}$, h_c und a) r. b) c. c) $a \mp b$. d) $h_b \mp h_a$.

77) $\frac{a + b}{p - q}$, F und a) c. b) h_c. c) $a - b$.

78) $a \pm b$, h_c und a) c. b) F. c) $p - q$.

79) F, h_c und a) s. b) $s - c$. 80) h_c, r und a) s. b) $s - c$.

81) $\frac{u}{c}$, $a + b$ und a) r. b) h_c. c) p.

82) w_γ, F und a) $a + b$. b) $h_b + h_a$.

83) $\frac{u}{h_c}$, $a + b$ und a) c. b) h_a. 84) $\frac{u}{r}$, $a + b$, c.

85) $\frac{u}{r}$, $p - q$, $a - b$. 86) $\frac{u}{a - b}$, $p - q$, h_c.

87) $\frac{u - v}{p - q}$, h_c und a) r. b) c. c) $a + b$.

88) $\frac{u - v}{p - q}$, $a + b$, F.

89) $\frac{u - v}{p - q}$, w_γ und a) r. b) $a \pm b$. c) c.

90) $\frac{u - v}{p - q}$, h_c, $h_b + h_a$. 91) w, $a + b$, c.

92) w_γ, $a - b$, $p - q$. 93) w_γ, $u - v$, $p - q$.

94) w_γ, $u - v$, $a - b$. 95) $u - v$, h_c und a) $a - b$. b) $p - q$.

96) w_γ, F und a) c. b) s. c) $s - c$.

97) $\varrho_c : \varrho$ und a) $a \pm b$, r. b) $h_b \pm h_a$, c. c) $h_b - h_a$, $a + b$. d) $h_b - h_a$, $p - q$. e) $h_b - h_a$, $u - v$. f) $\varrho_a + \varrho_b$, $a + b$. g) $\varrho_a + \varrho_b$, $h_b + h_a$. h) $\varrho_a + \varrho_b$, s. i) $\varrho_a - \varrho_b$, c. k) $\varrho_a - \varrho_b$, $p - q$. l) $\varrho_a - \varrho_b$, $u - v$. m) $\varrho_a - \varrho_b$, s.

98) $\varrho_a : \varrho_b$ und a) $a \pm b$, r. b) $h_b \pm h_a$, c. c) $h_b + h_a$, $a - b$. d) $h_b + h_a$, $p - q$. e) $h_b - h_a$, $u - v$. f) $\varrho_c - \varrho$, $a - b$. g) $\varrho_c - \varrho$, $h - h_a$. h) $\varrho_c + \varrho$, c. i) $\varrho_c + \varrho$, $p - q$.

99) ϱ, ϱ_c und a) c. b) r. c) $a \pm b$. d) $h_b + h_a$. e) $u - v$. f) $\varrho_a + \varrho^b$. g) $p - q$. h) F. i) w_γ.

100) ϱ_a, ϱ_b und a) c. b) r. c) $a \pm b$. d) $h_b - h_a$. e) $\varrho_c - \varrho$. f) $p - q$. g) F. h) w_γ.

101) $a - b$, c und a) ϱ. b) ϱ_c.

102) $a + b$, $p - q$ und a) $h_c - \varrho$. b) $h_c + \varrho_c$.

103) $\varrho_a - h_c$, $a - b$ und a) $p - q$. b) $u - v$.

104) $\varrho_a - \varrho_b$, $\varrho_c + \varrho$ und a) c. b) $p - q$.

105) $\varrho_c : \varrho$ und a) $a - b$, c. b) $a + b$, $p - q$. c) $\varrho_a - h_c$, $\varrho_a - \varrho_b$. d) $\varrho_a - h_c$, $p - q$. e) $\varrho_a - h_c$, $h_c - \varrho_b$. f) ϱ_a, ϱ_b.

106) $\varrho_a : \varrho_b$ und a) $a + b$, c. b) $a - b$, $p - q$. c) $a - b$, $u - v$. d) $\varrho_c + \varrho$, $u - v$. e) $\varrho_c + \varrho$, $h_c - \varrho$. f) $\varrho_c + \varrho$, $h_c + \varrho_c$. g) ϱ, ϱ_c.

107) $h_c - \varrho$, r und a) $a + b$. b) $s - c$.

108) $h_c + \varrho_c$, r und a) $a + b$. b) s.

109) $\varrho_a + \varrho_b$, $a - b$ und a) $p - q$. b) $u - v$.

110) $\varrho_c - \varrho$, $a + b$, $p - q$.

	1	2	3	4	5	6
a	20	20	75	75	109	109
b	13	13	29	29	61	61
c	21	11	92	52	102	80
h_a	12,6	6,6	25,76	14,56	56,1468	44,0367
h_b	19,3846	10,1538	66,6207	37,6552	100,3279	78,6885
h_c	12	12	21	21	60	60
p	16	16	72	72	91	91
q	5	−5	20	−20	11	−11
w_r	12,4383	15,2023	21,7478	40,3887	65,2331	71,9183
u	12,7273	6,66 . . .	66,3462	37,5	65,4	51,2941
v	8,2727	4,33 . . .	25,6538	14,5	36,6	28,7059
s_a	14,3178	6,7082	56,9759	19,1377	63,9707	45,71925
s_b	19,44865	14,7733	82,6695	62,8828	101,0557	90,61014
s_c	13,2004	15,9452	33,4216	50,5668	72,11103	78,74643
r	10,833 . . .	10,833 . . .	51,7857	51,7857	55,40833	55,40833
ϱ	4,66 . . .	3	9,85714	7	22,5	19,2
ϱ_a	18	33	42	182	113,33 . . .	150
ϱ_b	9	7,33 . . .	14	11,1429	40,8	37,5
ϱ_c	21	6	161	21	90	53,33 . . .
F	126	66	966	546	3060	2400
α	67° 22′ 48″	112° 37′ 11″	46° 23′ 50″	133° 36′ 10″	79° 36′ 40″	100° 23′ 20″
β	36° 52′ 12″	36° 52′ 12″	16° 15′ 37″	16° 15′ 37″	33° 23′ 55″	33° 23′ 55″
γ	75° 45′	30° 30′ 37″	117° 20′ 33″	30° 8′ 13″	66° 59′ 25″	46° 12′ 45″

winklige Dreiecke.

7	8	9	10	11	12
194	194	281	281	650	650
145	145	178	178	433	433
147	113	309	153	651	361
109,1134	83,8763	175,943	87,1174	408,6279	226,597
145,9862	112,22	277,753	137,5281	613,4134	340,1571
144	144	160	160	408	408
130	130	231	231	506	506
17	−17	78	−78	145	−145
151,1311	158,1279	165,3776	210,8565	423,9734	500,1777
84,1239	64,6667	189,17	93,66 . . .	390,7202	216,66 . . .
62,8761	48,3333	119,83	59,33 . . .	260,2797	144,33 . . .
109,1238	86,5332	209,3855	88,353	447,236	230,8246
156,0969	141,2312	281,6025	208	613,4152	479,1015
154,6876	161,6733	177,3479	222,4191	446,1438	521,9331
97,6736	97,6736	156,30625	156,30625	344,9142	344,9142
43,5556	36	64,375	40	153,1765	102
216	254,25	240	489,6	612	1022,833 . . .
108	100,4444	120	95,625	306	254,8235
110,25	72	329,6	80	614,833 . . .	204
10584	8136	24720	12240	132804	73644
83° 16′ 1″	96° 43′ 58″	64° 0′ 39″	115° 59′ 21″	70° 26′ 7″	109° 33′ 53″
47° 55′ 30″	47° 55′ 30″	34° 42′ 29″	34° 42′ 29″	38° 52′ 48″	38° 52′ 48″
48° 48′ 29″	35° 20′ 32″	81° 16′ 52″	29° 18′ 10″	70° 41′ 5″	31° 33′ 19″

Druck von August Pries in Leipzig.